國立交通大學

資訊科學與工程研究所

碩士論文

以題目結構與解題策略定義益智遊戲難度

Rating Puzzle Difficulty with Problem Structure and Problem-Solving Strategy

研 究 生：陳順貞

指導教授：孫春在 教授

中華民國一百零一年一月

以 題 目 結 構 與 解 題 策 略 定 義 益 智 遊 戲 難 度
Rating Puzzle Difficulty with Problem Structure and Problem-Solving Strategy

研 究 生：陳順貞　　Student：Shuen-Jen Chen

指導教授：孫春在　　Advisor：Chuen-Tsai Sun

國 立 交 通 大 學
資 訊 科 學 與 工 程 研 究 所
碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Institute of Computer Science and Engineering
College of Computer Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in

Computer Science

January 2012

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百零一年一月

以題目結構與解題策略定義益智遊戲難度

研 究 生：陳順貞　　　　　指導教授：孫春在　博士

國立交通大學資訊科學與工程研究所

中文摘要

目前遊戲市場中的益智遊戲，設計者都有自己定義遊戲難度的方式，但多數玩家都有感受到遊戲關卡未完全從簡到難排序的經驗，有時較難的關卡會被安排在較簡單的關卡之前，甚至突然出現很困難的關卡使玩家卡關，這些情況都會影響玩家遊戲時的情緒，產生焦慮或感到無聊而無法進入心流狀態。原因在於目前益智遊戲設計評估難度的方法，未考慮玩家對遊戲的真實感受。因此本研究以數獨為例，採用解題成功率定義試題難易度。但如果每題數獨題目都需蒐集許多玩家遊戲後的數據統計解題成功率，將過於耗費人力和時間，因此本研究以題目結構和解題策略應用次數當作變數，採用迴歸分析法找出預測數獨解題成功率的公式，當作定義數獨難度的資料來源。

關鍵字：數獨、益智遊戲、遊戲難度、解題成功率

Rating Puzzle Difficulty with Problem Structure and Problem-Solving Strategy

Student：Shuen-Jen Chen　　Advisor：Dr. Chuen-Tsai Sun

Institute of Computer Science and Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

The difficulty levels of a puzzle game are usually defined by its designers with their own judgment. However, many players had such experiences that game levels are not well ordered. Sometimes a more difficult level appears before an easier one; sometimes a player suddenly faces an unexpected difficult level so that he cannot solve it and gets stuck there. These situations will affect the player's mood, so that he may become anxious or bored and it will be hard for him to stay in the ideal flow status.

In this research I define the difficulty of Sudoku, a famous puzzle game, based on the success rate of problem-solving. I also consider that the cost would be too high to calculate difficulty by collecting a large amount of problem-solving cases. Therefore, I use regression analysis based on both problem structure and problem-solving strategy to identify a formula for estimating problem-solving success rate, and then use this formula for prediction.

Keywords：Sudoku, puzzle game, game difficulty, problem-solving success rate

誌 謝

首先我要誠摯的感謝我的指導教授孫春在老師，在研究所期間老師著重於培養學生的研究精神，當研究遇到瓶頸的時候，老師不但會給予精神上的鼓勵，更會花費時間與我討論改進的方法，真的很幸運在我的研究生涯中遇到這樣的好老師，由衷得感謝老師這兩年來的照顧。

另外也要感謝這兩年生活中，周遭許多的朋友，在研究遇到困難的時候，由於大家的加油打氣，使得我更有動力解決困難。感謝實驗室的夥伴—郁雯、金秀、偉存、左手、承宏、照哥、怡中、肥羊、振濃，以及學長們—豪哥、基哥、勝毅學長，感謝大家在讀研究所的過程中陪我一起討論課業，一起玩樂、一起成長，讓我的研究所生涯多采多姿。除此之外，我還要感謝口試委員陳一平老師、張智星老師、胡毓志老師給我得指導與建議，使我的論文更加完備。

最後，我要感謝我的家人，尤其是我的父母，感謝你們提供資源支援我所需要的一切，讓我可以全心全意的做研究，順利完成學業。

目錄

圖目錄

表目錄

一、 緒論

1.1 研究動機

近年來益智遊戲逐漸成為生活中的一部份，無論是報紙上的數獨還是智慧型手機上的小遊戲，人們愈來愈喜歡在閒暇之餘或零碎時間挑戰益智遊戲。益智遊戲大都分成許多關卡，藉由遊戲元素的變化，使玩家在每關皆有不同程度的挑戰，而這些關卡該如何分類排序，是遊戲設計中重要的一環。

目前益智遊戲關卡大多依難度排序使玩家循序漸進接受挑戰，或將關卡依難度分類後，讓玩家選擇適合自己程度的關卡，此目的在於使玩家較容易進入心流狀態 (Csikszentmihalyi, 1975)。心流狀態是指人從事某活動時，當技能與挑戰達到平衡，人會將全部精神投入此情境中，忘記時間流逝和忽略外界干擾，同時具有興奮與充實感，但當挑戰高於技能，會處於焦慮的狀態，而技能高於挑戰時人又會感到無聊。心流狀態大多發生在進行喜歡事物的過程中，例如玩遊戲時容易產生此經驗，所以心流常被當作評估玩家是否感覺遊戲好玩的指標 (Chen, 2007; Sweetser & Wyeth, 2005)。因此玩家從較簡單的關卡開始熟悉遊戲，隨著逐漸增加關卡難度，玩家慢慢接近甚至進入技能與挑戰平衡的狀態，且玩家在遊戲過程中同時也在學習，技能會隨著遊戲進行增加，在此同時關卡難度如果也漸漸提升，可讓玩家一直維持在心流狀態，擁有最美好的遊戲經驗。

然而現今益智遊戲關卡排序時常讓人感受未完全從簡到難，有時較難的關卡會被安排在較簡單的關卡之前，甚至突然出現很困難的關卡使玩家卡關，這些情況都會影響玩家遊戲時的情緒，產生焦慮或感到無聊而無法進入心流狀態，原因在於目前益智遊戲設計評估難度的方法，大多是利用電腦分析遊戲題目進而定義難度，例如計算遊戲複雜度、

尋找解題最短路徑，未考慮從玩家角度分析對遊戲的真實感受。因此，本研究希望能找出貼近玩家感受的屬性去評估遊戲難度，使難度設定更加準確。然而益智遊戲種類繁多，特性各不相同，評估遊戲難度方式也有差異。其中數獨最廣為流行，網站上和報章雜誌中時常可見，且遊戲元素單純，僅需 n x n 個方格和數字組成，但藉由數字排列可產生千變萬化的題目，因此本研究以數獨為例，找尋評估難度較好的方法。

1.2 研究背景

1.2.1 益智遊戲難度定義

目前遊戲市場中的益智遊戲，設計者都有自己定義遊戲難度的方式，而過去與遊戲難度相關的研究大多著重於以下三種概念 (Jarušek & Pelánek, 2010)：

(1) 爬山演算法 (hill-climbing heuristic)：

藉由爬山演算法解題，並根據解題步驟數區分難度。例如：數字推盤遊戲 (Pizlo & Li, 2005)、過河問題 (Greeno, 1974)…等，皆可以此方法定義遊戲難度。

(2) 手段-目的分析 (means-end analysis)：

藉由分析問題起始狀態與最終目標之間的差距，找出縮小差距的方法，以達最後目的。大多用於較複雜無法直接找出解答的問題，例如河內塔問題。

(3) 找出問題中的同構問題，並著重於同構問題產生的難易度，例如河內塔問題和中國九連環 (Kotovsky, Hayes & Simon, 1985)。

此外從問題中找出可能影響玩家解題的屬性並以此定義難度也是常見的方法，例如 Jarušek & Pelánek (2010) 提出利用狀態空間 (state space) 評估倉庫番的難度。從以上方法可得知，目前評估益智遊戲難度大多從問題的初始結構或電腦題目結構著手，較少從

玩家的角度去評估。因此本研究選擇目前最廣為人知的益智遊戲 - 數獨為例，希望能找出貼近玩家真實感受的難度定義方式。

在過去數獨的相關研究中，許多學者提出各式各樣定義數獨難度的方法， Mantere & Koljonen (2007) 提出使用基因演算法平均需演化幾代才能成功解題為標準定義數獨難度，但利用基因演算法解題和人類實際解題模式差異甚大，以此定義的難度分類與玩家實際感受有所不同。而 Leone, Mills & Vaswani (2008) 提出利用平均解題時間定義數獨難度，雖然解題時間與玩家感覺遊戲難易有直接關聯性，卻未考慮無法成功解題的玩家感受，且解題失敗次數也應該與題目難度相關，因此以平均解題時間評估數獨難度不夠準確，本研究希望能找出較好的難度評估方式，準確表達玩家對數獨難度的感受。

評估遊戲對玩家的難易度，似於評估試題對受試者的難易度，且考試制度採用許久，因此已發展出有一套量化分析理論 - 測驗理論 (test theory)，因此本研究希望能藉由測驗理論定義遊戲難度。

1.2.2 測驗理論

考試制度始於中國的科舉制度，然而將「測驗」科學化卻是始於歐美國家。Binet & Simon (1905) 於法國發展的智力測驗即是人類第一個心理測驗，測驗理論 (test theory) 乃源自於此。測驗理論發展至今分為兩個學派：一為古典測驗理論 (classical test theory，簡稱 CTT) ；另一為現代測驗理論 (modern test theory，另稱試題反應理論)，以下針對兩者做簡單介紹。

古典測驗理論 (Gulliksen, 1950) 是最早的測驗理論，目前亦最實用的測驗理論。其概念可以下列公式描述：

$$X = t + e$$

其中 X 代表實得分數，t 代表真實分數，即為測驗想要測得的受試者真正能力，而 e 代表誤差分數，為此測驗無法測得的受試者能力。而古典測驗理論中，試題難度的計算方式為解題成功次數除以解題成功次數加上解題失敗次數，亦即解題成功率 (Crocker & Algina, 1986) 。

Rasch (1960) 提出了 Rasch 測量模式，正式開啟了現代測驗理論的一章。現代測驗理論的模型可以由下列公式描述：

$$log\ (P_1 / P_0) = \theta_n - \beta_i$$

P_1 代表答對的機率，P_0 代表答錯的機率，P_1 加 P_0 總和為 1，θ_n 表示第 n 個人的能力，β_i 表示第 i 題的難度。不同於古典測驗理論，Rasch 模式對於測驗的解釋是同時包含了能力和難度的。而現代測驗理論的難度計算方式為具有 50%機率能答對試題的受試者能力量尺，計算上較不容易。

因此本研究將數獨當作試題，採用古典測驗理論中計算試題難度的公式定義數獨難度。此方法利用玩家遊戲後的數據評估難度，改善之前沒有考慮玩家感受的缺點，但如果每題數獨題目定義難度前都需蒐集許多玩家遊戲後的數據，將過於耗費人力和時間，因此本研究希望能找出預測數獨解題成功率的公式，當作定義數獨難度的資料來源。

1.2.3 預測

「預測」是任何科學中最困難的部分，也是人類智慧最大的挑戰之一，古人說：「千金難買早知道」，正是說出了預測的難度以及重要性。人類許多事都希望能夠預測，例如天氣、股票、金融風暴、票房等等。而在現代競爭激烈的經濟環境下，企業如果希望

保有競爭優勢，組織的管理階層更必須有對市場精確的預測和良好的策略，企業應以更先見的策略來提升競爭優勢，因此，銷售預測早已成為企業管理之重要的一環 (Chopra & Meindl, 2001)。在預測方面，分為以下預估方式：

(1) 定性預測：

定性預測是指預測者利用歷史資料和自身經驗，對未來做評估。其預測偏重於市場行情發展方向和施工項目的成本分析…等，能發揮專家經驗的預測。定性分析的優點在於靈活性較高，易於讓專家發揮所長，而且簡單快速。

(2) 時間序列分析：

時間序列分析是一種利用歷史資料的延伸，根據過去變化趨勢預測未來可能發展。使用時間序列分析的前提為事物的過去可延續到未來，這代表不會發然突然性變化，且歷史資料可看出未來發展的方向。

(3) 因果關係分析法：

因果關係分析法是從事物變化的原因出發，以統計方式找出兩者之間的依存關係並函數化，其中最常被應用的方法為迴歸分析法，是研究單一依變項 (dependent variable) 與一個或一個以上自變項 (independent variable) 之間的關係，利用迴歸分析我們可以找到依變項和自變項之間的關係，進而進行預測。

本研究認為數獨解題率會受題目結構和解題策略影響，例如當某些題目的題目結構較複雜或需要較高技巧才能解題時，有些玩家技巧或耐心不足造成解題失敗，導致解題率降低。因此本研究採用迴歸分析法預估數獨解題成功率，將分析資料庫中的數獨題目和題目結構建立迴歸模型。

1.3 研究目標

本研究將以數獨為例，希望能找出貼近玩家感受的定義益智遊戲難度方法，讓玩家在遊戲時能較容易達到技能與挑戰平衡而產生心流經驗。本研究採用古典測驗理論中評估試題難度方式，以解題成功率定義數獨難度，但此方法需收集許多玩家遊戲後的數據作為依據，過於耗時費力，因此本研究希望能利用迴歸找出預估數獨解題成功率的公式，當作定義數獨難度的資料來源。本研究重點分為兩項：

(1) 找出與解題成功率相關的屬性

欲使用迴歸方式找出預測解題成率的公式，須先找出與成功率相關的變數當作自變數，且根據迴歸分析的基本假設，依變數與自變數之間的關係必須為線性關係。本研究根據過去與數獨相關的研究，將從人類使用的數獨解題策略，和數獨題目結構尋找可能與解題成功率相關的屬性。

(2) 定義解題成功率的迴歸公式

找出與解題成功率相關的屬性後，該如何選擇自變數達到最好的迴歸模式，使產生的預測公式與實際的解題成功率誤差量最小為重要目標。以迴歸分析而言，能以較少的自變數解釋迴歸模式的最大量為佳，因此需找出屬性中影響解題成功率最關鍵的變數。

1.4 研究重要性

在數獨相關研究中可分為三大方向：解題、出題和定義難度， Fowler (2008) 認為解題比出題容易，而出題又比定義難度容易。然而數獨難度適當的區分，使玩家選擇合適自己程度的題目，有助於玩家在遊戲過程中產生心流經驗，因此難度定義深深影響數

獨玩家的遊戲興致。

目前與定義難度相關的研究，大多採用一套演算法成功解題後，以解題步驟數評估難度，然而演算法解題與人類解題的模式不盡相同，因此以此方式定義的題目難度不一定與玩家實際感受相符。另外，還有研究以解題時間定義遊戲難度，此方法貼近玩家感受，但沒考慮到玩家未解出題目的情況，但解題失敗數量也應該與題目難度有強烈的關係。因此，本研究採用解題成功率評估數獨難度，除了方法簡單容易實行外，還均顧所有玩家對遊戲的感受。

1.5 研究問題

針對本研究欲達成的目標，需尋找與數獨解題成功率相關的屬性，和選擇較佳的自變數達到最好的迴歸模式，本研究將從人類解題策略與題目結構兩方向著手，因此訂出以下幾項研究問題：

一、題目結構

(1) 利用題目結構中的哪些屬性能有效預測解題成功率？

(2) 解題成功率與題目結構中的屬性之間呈何種關係？

二、解題策略

(3) 解題策略中哪些技巧使用次數能有效預測解題成功率？

(4) 解題成功率與解題策略中的屬性之間呈何種關係？

三、題目結構的相關屬性與解題策略何者預測數獨解題成功率的預測力較高？

二、 文獻探討

2.1 益智遊戲

2.1.1 定義

何謂益智遊戲？ Chris Crawford (1984) 在 The Art of Computer Game Design 中提到玩樂分類：

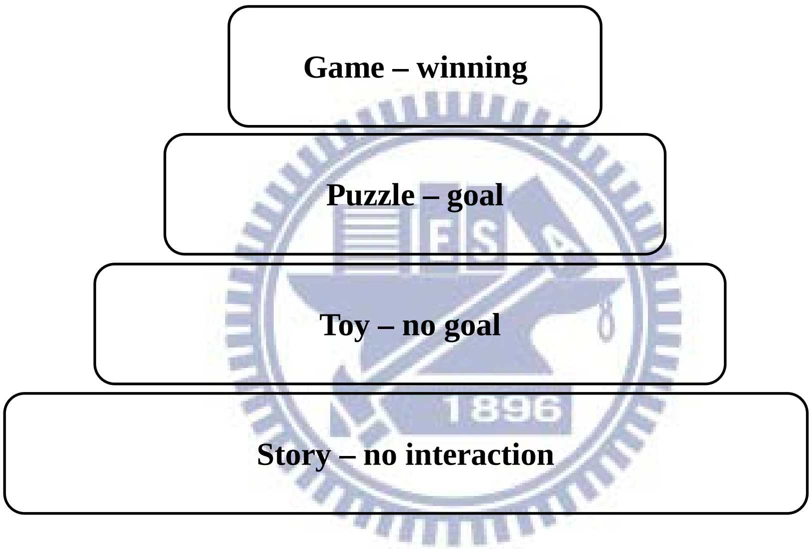

圖 2.1.1、Chris Crawford 的玩樂分類

如圖 2.1.1 所示， Chris Crawford 認為玩樂分為四種，依據互動程度多寡由上而下排列，每種類型都建構在下一層的遊戲類型之上。

第一層　遊戲 (Game)，是一種具有規則的系統，綜合以下三層玩樂種類，將益智遊戲轉換為具互動的電腦遊戲，玩家可自由操控，具故事性，目標是要贏過對手獲得勝利。

第二層　益智遊戲 (Puzzle)，亦是具有規則的系統，雖然類似遊戲但和遊戲不一樣，益智遊戲的目標不是打敗對手，而是找到遊戲的解答；

第三層　玩具 (Toy)，玩家可自由操控，類似益智遊戲具有互動性但沒有明確的目標。

第四層　故事 (Story)，和玩具一樣可以有無限的想像空間沒有實際目標，但在故事中玩家不能操縱或改變劇情，不具互動性。

Chris Crawford 清楚劃分遊戲和益智遊戲之間的區別在於目標的不同，對於本系統在設定益智遊戲目標時有更清楚的規範。另外，知名益智遊戲設計師 Scott Kim 也為益智遊戲設計提出八項步驟：

(1) 靈感：藉由舊有的遊戲、故事或生活經驗找尋創作遊戲的靈感。

(2) 簡化：確定遊戲核心概念後，減少不必要的細節，接著標準化物件，最後簡化遊戲操作。

(3) 建立相關機制：為了確保構想可行，因此必須做出試玩版進行測試。首先需要建立遊戲開發引擎，能實驗各種規則是否可行，接著要能自動建立關卡以便測試，最後甚至希望能讓玩家自己創造益智遊戲。

(4) 定義規則：定義遊戲面板形狀、大小、物件移動方式和遊戲目標。

(5) 解謎：建構玩家從遊戲開始到遊戲目標達成的路徑，不同的解謎遊戲有不同的建構

方式，有些遊戲希望在玩家找到解答時有 Aha！ 的驚喜，有些遊戲希望玩家在交叉反覆思考中得到解答。

(6) 測試：測試遊戲是否好玩？難易度適中？遊戲是否需要改進？

(7) 製作成系列：首先要讓玩家了解規則，接著根據關卡難易度調整順序，同時必須注意玩家是否在失敗後還想回到遊戲挑戰。

(8) 呈現：除了遊戲本身之外，還必須包括介面設計、音效搭配、故事設計…等，才算是完整的遊戲呈現。

八個步驟中，一個遊戲是否有趣、有創意且能夠吸引玩家，在第一步「靈感」時已經確立，因此如何找到靈感發揮創意是在開發新遊戲時最重要卻也最困難的議題。

2.1.2 背景

自古以來人類就著迷於益智遊戲，例如中國傳統的益智遊戲「九連環」傳說是三國時代諸葛亮發明，於明清時廣為流傳，甚至在《紅樓夢》中都有描寫玩九連環的細節，在西方被稱做「中國環(Chinese Ring)」，約在西元 1550 年義大利數學家 Luca Pacioli 在論文中利用代數方程描述九連環。到了 1870 年代早期出現了著名的「15 puzzle」，另外常見的還有「8 puzzle」，1880 年風行於美國、加拿大和歐洲，卻沒能流行很長時間。接著 1883 年法國數學家 Edouard Lucas 發明河內塔問題（Tower of Hanoi），此問題也延伸出許多有趣的數學解釋。1970 年代中期匈牙利建築學教授和雕塑家 Rubik Ernő 發明魔術方塊（Rubik's Cube），在 1980 年代最為盛行，至今歷久未衰，除了舉辦國際性比賽還成立世界魔術方塊協會（World Cube Association，簡稱 WCA）。另外，近年來廣為流行的數獨源自於拉丁方陣遊戲，是建築師 Howard Garns 所發明，本來稱為 Number

Place（數字的位置），1984 年被刊登在日本遊戲雜誌之後，正式命名為 Sudoku（數獨），代表「每一格只有一個數字」的意思。但數獨能登上在全球各大報，風靡全世界，在公車、地鐵…等大眾運輸上許多人手拿報紙解數獨的盛況，都要歸功於一位退休的法官 Wayne Gould ，1997 年當他去日東京旅遊時，發現數獨這個遊戲，之後還花了幾年的時間寫了自動產生數獨的程式，並發表於英國的泰晤士報上，接著許多報章雜誌也相繼刊登，相關書籍也在書店暢銷排行榜中榜上有名。由此可知，科技的發展，電腦運算技術的進步，對於益智遊戲的發展也有很大的貢獻。

第一款電子遊戲在 1952 年誕生，到了 1980 年代許多經典遊戲相繼問世，其中包括日本 Thinking Rabbit 公司發行的益智遊戲－倉庫番，不同於許多由傳統遊戲為基礎的電子遊戲，倉庫番有許多限制，例如在遊戲制定上就表明所有物體不能重疊，或者將箱子推到牆邊後，玩家即無法再將箱子由牆邊推回中央，這些規則條件都能利用電腦設定簡單完成。除此之外，大部分益智遊戲會分成數個關卡，難度由淺至深，遊戲設計者在將關卡設計完成後，儲存於電腦硬體中，當玩家達到過關條件後，電腦自動載入下一關。因此，有了電腦這項工具之後，遊戲設計者可以將遊戲設計得更複雜有趣，讓玩家更容易融入在遊戲中。

2.2 數獨

2.2.1 背景

「數獨」（sudoku）來自日文，但概念源自「拉丁方塊」，是十八世紀瑞士數學家歐拉發明的，之後流傳至日本並發揚光大。而後一位紐西蘭籍法官 Wayne Gould 在 1997 年旅遊日本時，買了一本數獨遊戲書，從此就迷上了數獨，他首先在英國的《泰晤士報》

上發表，不久其他報紙也發表，很快便風靡全英國，之後他用了 6 年時間編寫了電腦程式，並將它放在網站上，使這個遊戲很快在全世界流行，據說，「數獨」還成為英國報紙銷售量的法寶，連美國紐約時報也無法阻擋它的魅力，另外，台灣的中國時報也取得古德的授權 ，每天都刊出一則數獨謎題，讓數獨第一次出現在台灣的大眾媒體上，也是全球第一家引入數獨遊戲的中文報紙。

數獨的玩法很簡單，在 9×9 格的大九宮格中有 9 個 3×3 格的小九宮格，並提供一定數量的數字。根據這些數字，利用邏輯和推理，在其它的空格上填入 1 到 9 的數字。每個數字在每個小九宮格內只能出現一次，每個數字在每行、每列也只能出現一次。 數獨只需要邏輯思維能力，而不需要數字運算，然而，數獨遊戲中數字的排列方式卻千變萬化，因此不少教育者認為數獨是鍛煉腦筋的好方法。

由於數獨的數字排列組合共有 9! × 72 2× 27× 27,704,267,971 = 6,670,903,752,021,072,936,960 個組合，在 2005 年由 Bertram Felgenhauer 利用窮舉法和邏輯計算出，即使將重複（如數字轉換，反射面等）不計算，亦有 5,472,730,538 個組合，因此在解題上必須利用許多邏輯推理的技巧，才能更有效率的解出數獨題目。

2.2.2 數獨解題策略

數獨的解題策略大致可分為直觀法解題策略和候選數法解題策略，直觀法為人性化思考解題模式，而候選數法大多須使用電腦作為輔助，以下為詳細介紹：

(1) 直觀法解題策略：

數獨的解謎技巧，剛開始發展時，是以直觀法為主，對於初入門的玩家來說，也是一般人較容易理解和接受的方法，直觀法的特性就是不需要利用任何的輔助工具即可解

題，此方法的核心價值在於把握數獨遊戲的填製原則：絕不猜測。而直觀法的主要的技巧可分為兩大類：

1. 餘數法：

餘數法是觀察特定的空格是否有解的方法，也是初學者剛接觸數獨時，最容易理解及應用的方法，而餘數法又可以細分出唯一法、二餘法、三、四餘法、數對唯餘法等等。

(a) 唯一法：當數獨謎題中的某一個宮格因為所處的列、行或九宮格已填入數字的宮格達到 8 個時，那麼這個宮格所能填入 的數字，就只剩下那個還沒出現過的數字。

(b) 二餘法：某一個行、列或九宮格待填的數字已降到 2 個時，就以該單元所餘待填的兩個數字，在所餘的兩個空格之所在群組的另兩個單元中尋找，如果可以找到任何一個，就可以確認空格之正解；且如果找到了某個空格的正解， 那麼另一個空格的正解就隨之確定。三餘法、四餘法則以此類推。

(c) 唯餘法：當數獨謎題中的某一個宮格，因為所處的列、行及九宮格中，合計已出現過不同的 8 個數字，使得這個宮格所能填入 的數字，就只剩下那個還沒出現過的數字時，我們稱這個宮格有唯餘解。

2. 摒餘法：

摒餘法是觀察特定的數字在某一單元是否有解的方法，也是入門後應用最廣的技巧之一，解題的時候又細分成宮摒餘法和行列摒餘法而進行摒除的方法有基礎摒除法、區塊摒除法、單元摒除法、矩形摒除法、數對摒除法、數偶摒除法等等，利用各種

摒除的方法將指定單元中不可能填入的空格一一摒除，所得到的解即為「摒餘解」。

(a) 宮摒餘法：宮摒餘解的系統尋找是由數字 1 開始一直到數字 9 ，週而復始，直到解完全題或無解時為止，必須找到宮摒餘解，亦即某數在某一個九宮格可填入的位置只餘一個的情形。

(b) 行列摒餘法：和宮摒餘解的尋找一樣，列摒餘解的系統尋找是由數字 1 開始一直到數字 9 ，週而復始，直到解完全題或 無解時為止，必須找到行摒餘解及列摒餘解，亦即某數在某列或某行可填入的位置只餘一個的情形。

一般人在利用直觀式的解題策略解題時習慣僅僅利用唯一解及宮摒餘法解題，而比較容易忽略行、列摒餘解的尋找，亦不太常利用二餘法、三餘法、唯餘法等等的解題方法。

(2) 候選數法解題策略：

直觀式的解題策略對於一般簡易級或中級的數獨謎題雖然已游刃有餘，但是在使用上卻有其限制，而在中、高級的數獨謎題上難以使用得當。另外，直觀式的唯一解法及摒除法，不但在程式編寫上難以呈現，在執行效率上也將顯得十分笨拙，因此就有了候選數法的誕生。候選數法主要利用候選數表，將每一格的剩餘候選數做相應刪減及分析，進而找出方格的唯一解，其使用的方法又可細分為唯一候選數法、隱性唯一候選數法、區塊刪減法、數對刪減法、三鏈數刪減法等等。

2.3 測驗理論

2.3.1 背景

測驗與評量最早可回溯到中國漢朝，其結構複雜的拔擢優秀文官程序，堪稱當世

一絕，直至隋唐時代的科舉制度，更是到達了鼎盛。然而將「測驗」科學化卻是始於歐美國家。Binet & Simon (1905) 於法國發展的智力測驗即是人類第一個心理測驗，測驗理論 (test theory) 乃源自於此。測驗理論發展至今分為兩個學派：一為古典測驗理論 (classical test theory，簡稱 CTT) ；另一為現代測驗理論 (modern test theory，另稱試題反應理論)。以下分節進行詳細介紹。

2.3.2 古典測驗理論

過去以來，古典測驗理論的發展讓心理測驗不再是虛幻的算命，而是更近乎科學的評量。透過嚴謹、標準的控制施測程序，並加上建立適當的常模，古典測驗理論使得心理測驗的價值提升到一個新的層次。古典測驗理論主要是以整份測驗的觀點，來解釋測驗分數的涵義，單獨一道試題的得分，不具有任何意義的解釋價值。古典測驗理論的概念可以下列公式描述：

$$X = t + e$$

其中 X 代表實得分數，t 代表真實分數，即為測驗想要測得的受試者真正能力，而 e 代表誤差分數，為此測驗無法測得的受試者能力。

但古典測驗理論並非完美無缺，尤其當我們用「科學」的角度來談古典測驗理論所達到的價值時，古典測驗理論依然有許多值得改進的地方。而其中一個主要的原因是古典測驗理論的計算與使用，皆是藉由測驗工具所表徵出來的原始分數，而沒法達到科學層次的客觀，如果測驗結果以原始分數呈現，結果可能就會因為測驗工具的不同而有所改變，並非是我們想真正觀察到的能力差異，心理測驗也就仍然無法達到科學層次的客觀。

2.3.3 現代測驗理論

有鑑於古典測驗理論的不足之處，學者提出了新的測量模式和測驗分數，取代以原始分數為基礎的測驗統計方式。Rasch (1960) 提出了 Rasch 測量模式，正式開啟了現代測驗理論的一章。

現代測驗理論主要是以個別試題的觀點，來解釋測驗分數的涵義。它認為學生在某一試題上的表現情形，與其背後的某種潛在特質（即能力）之間具有某種關係存在，該關係可以透過一條連續性遞增的數學函數來加以表示和詮釋，現代測驗理論的模型可以由下列公式描述：

$$log\ (P_1 / P_0) = \theta_n - \beta_i$$

P_1 代表答對的機率，P_0 代表答錯的機率，P_1 加 P_0 總和為 1，θ_n 表示第 n 個人的能力，β_i 表示第 i 題的難度。不同於古典測驗理論，Rasch 模式對於測驗的解釋是同時包含了能力和難度的。用變異數分析的概念來說，Rasch 模式中解釋了兩種主要效果，因此能力參數的高低和難度參數的高低無關，同樣難度參數的高低也和能力參數無關，兩者共同影響的只有公式左側的答對答錯比率。因此，以原始分數為基礎的古典測驗理論，似乎不能符合科學層次的心理測驗的期待。但現代測驗理論的出現，完美的解決了這個問題。

現代測驗理論被廣泛應用在健康醫學、社會、心理、教育、管理及體育等方面，最近兩年體育運動領域在這方面的研究有長足的進展，但是相較於教育領育仍明顯偏低。現代測驗理論最主要用於編製及估計測驗，近十年來的應用量逐漸增加， Green & Frantom (2002) 比較有、無使用現代測驗理論分析編製問卷的差異，並提出發展問卷的五項挑戰。Hong, Kim & Wolfe (2005) 的研究則是直接使用現代測驗理論分析來修訂量

表，Reeve & Fayers (2005) 利用現代測驗理論則提出應用試題反應理論評價試題和量尺特質、以及改進量尺的方法。另外，現代測驗理論亦廣泛使用在測驗測量及體育運動領域，甚至影響到健康、休閒、醫療和競技方面的研究，2000 年以後醫療健康方面已經急速大規模的成長研究現代測驗理論，歐洲跨國的生活品質和健康研究，專門網紛紛設置，積極將現代測驗理論分析用於測量之上。

2.4 預測

在現代競爭激烈的經濟環境下，企業應以更先見的策略來提升競爭優勢，因此，對於未來的預測也受到大家的關注，一般的預測利用蒐集歷史資料並用數學模型來預測未來資料。預測的方法相當廣泛，以下介紹學者常用的幾種方法：

(1) 移動平均法 (moving averages) ：

移動平均法是利用最近的實際數據值來預測的一種方法，是一種簡單平滑預測技術，主要根據以時間排序的資料依次計算包含一定項數的平均值並逐項推移，以反映出數據長期的趨勢，移動平均法能有效地消除預測中的隨機波動，因此非常受企業好評。而移動平均法又可分為簡單移動平均法和加權移動平均法。

1. 簡單移動平均法：

簡單移動平均法假設資料中的各元素權重皆相等，比較適用於相當穩定的情況下，其公式如下：

$$F_t = (A_{t-1} + A_{t-2} + A_{t-3} + \ldots + A_{t-n}) / \mathrm{n}$$

其中，F_t 為對下一期的預測值 ，n 為移動平均的時期個數，A_{t-1} 為前期實際值，A_{t-2}、A_{t-3} 和 A_{t-n} 分別表示前兩期、前三期直至前 n 期的實際值。

2. 加權移動平均法：

由於不同時期的資料對於預測值的影響程度會有不同，加權移動平均法根據不同時期的資料對預測值的影響程度，分別給予不同的權重，使預測更為準確，其公式如下：

$F_t = w_1A_{t-1} + w_2A_{t-2} + w_3A_{t-3} + \ldots + w_nA_{t-n}$

其中若以銷售額為例，w_1 為第 $t\text{-}1$ 期實際銷售額的權重，w_2 為第 $t\text{-}2$ 期實際銷售額的權重，wn 為第 $t\text{-}n$ 期實際銷售額的權，n 為預測的時期數，$w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$。使用加權平均法時，權重的分配是一個重要的課題，大部分利用經驗法或試演算法來分配權重，大部分情況下最近期的數據最能預測未來的情況，因此越近期的資料其權重越高，另外有些是季節性的數據，其權重分配也會有季節性的高低。

(2) 指數平滑法 (Exponential Smoothing) ：

指數平滑法是由布朗 (Robert G..Brown) 所提出，他認為時間序列的資料具有穩定性或規則性，所以時間序列可被合理地順勢推延；另外，他認為近期的狀況會有某種程度上會持續到未來，因此將較大的權重放在最近的資料，其公式如下：

$$S_t = a \times y_t + (1 - a)\, S_{t-1}$$

S_t 為時間 t 的平滑值，y_t 為時間 t 的實際值，S_{t-1} 為時間 $t\text{-}1$ 的平滑值，a 為平滑常數，其取值範圍為[0,1]。

根據平滑次數不同，指數平滑法分為：一次指數平滑法、二次指數平滑法和三次指數平滑法等。

(3) 時間序列分析

時間序列原本是實證經濟學的一種統計方法， Engel & Granger (1987) 曾以此議題拿下 2003 年諾貝爾經濟學獎。時間序列最重要的特性就是將觀察數值依時間排序，是一組隨時間變化排序的觀察數據，且此數據在時間的前後有相互關聯的性質。時間序列分析 (Time Series Analysis) 是探討一串按時間排序資料間的關係，並籍由此關係預測未來。時間序列分析通常把各種可能發生作用的因素進行分類，傳統的分類方法是按各種因素的特點或影響效果分為四大類：

1. 長期趨勢
2. 季節變動
3. 迴圈變動
4. 不規則變動

經由分析時間序列再找出時間序列中的長期趨勢(T)、季節變動(s) 和不規則變動(I) 等等，訂立數學模型並使用合適的技術方法求出模型中的各個參數。

(4) 線性回歸

線性迴歸是研究單一依變項 (dependent variable) 與一個或一個以上自變項 (independent variable) 之間的關係。

一般多元線性迴歸模型公式如下：

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_k x_{ki} + \varepsilon \quad 且\ i = 1,2,\dots,n$$

y 為依變數，在此即為解題成功率，$x_1, x_2, \dots, x_k$ 為自變數，即與解題成功率相關的屬性，b_0 為常數項，$b_1, b_2, \dots, b_k$ 為迴歸係數，ε 為誤差值。

回歸分析中的係數必須用合適的技術方法求出，其中最常使用的就是最小平方法，最小平方法是一種數學優化技術。它以最小化誤差的平方和為前提來尋找最佳函數。利用最小平方法可以簡單的得到與實際數值之間誤差的平方和為最小的數據資料。

三、 研究方法

本研究目的為以古典測驗理論定義遊戲難度，希望採此方式設定的遊戲難度能貼近玩家感受。古典測驗理論中是以解題成功率定義試題難度，然而如須找玩家實際遊戲才能獲得解題成功率將過於費時和耗費人力，因此本研究希望能準確預估解題成功率，藉此定義遊戲難度。本研究將以數獨為例，研究流程分為三部份：

1. 建立資料庫
2. 探討數獨解題成功率與難度之間的相關性
3. 預估數獨解題成功率

第一部份將蒐集研究所需資料建立資料庫，以後後續參考分析使用，第二部份將深入分析數獨解題成功率與難度之間的關聯性，最後希望能找出準確預估數獨解題成功率的公式。以下分三節加以說明。

3.1 建立資料庫

台灣數獨協會網站上備有數獨線上挑戰專區，介面如圖 3.1.1 所示，每道題目皆有編號、挑戰次數、成功次數、成功率、平均用時、玩家解題記錄…等，且在題目下方以星號標示題目難度，從一顆星到五顆星代表由簡單到困難，由此可方便蒐集每道題目玩家解題的相關資料。本研究擷取每種難度且大小為 9 x 9 的數獨題目各 100 題，以數列方式記錄題目左上到右下格子內的 81 個數字，空格以 0 代表，並記錄挑戰次數、成功次數和難度星等。此外，網站上備有解題系統，此系統模擬人類解題時的思考模式，採用直觀式解題法解題，並詳細列出解題步驟，如圖 3.1.2 所示，左圖為數獨題目，右圖

為解題步驟，例如「1：宮摒餘解 --（2,6）= 8, 46」，代表解題程式解題的第一步是使用宮摒餘法解出第 2 行第 6 列為 8。 本研究將之前擷取的題目用此程式解題，並將得到的解題步驟建為資料庫以便後續參考分析使用。

題號	sudoku	挑戰次數	成功次數	成功率	平均用時	最新記錄	最快記錄	挑戰
9300	★	42	30	71.42%	4 ' 16 "	1: 2070 1 ' 22 " 2: lcslcs 3 ' 43 " 3: 000 15 ' 15 " 4: 摩天輪 1 ' 40 " 5: loveta 3 ' 02 " 6: chiou 5 ' 01 " 7: chiou 4 ' 22 " 8: chiou 9 ' 35 " 9: 珍珠奶茶 8 ' 34 " 10: 1086 1 ' 19 "	1: 0101 0 ' 59 " 2: liuyunan 1 ' 02 " 3: abcde 1 ' 04 " 4: lgh 1 ' 06 " 5: jsen 1 ' 14 " 6: KENNY 1 ' 16 " 7: 1086 1 ' 19 " 8: 7437 1 ' 21 " 9: 2070 1 ' 22 " 10: 10773 1 ' 23 "	
9299		28	22	78.57%	2 ' 46 "	1: 2070 1 ' 21 " 2: 摩天輪 1 ' 52 " 3: 珍珠奶茶 7 ' 04 " 4: lcslcs 2 ' 59 " 5: yeh3636 16 ' 00 " 6: ruhank 2 ' 05 " 7: cherrie 1 ' 29 "	1: liuyunan 1 ' 00 " 2: 1122 1 ' 03 " 3: lgh 1 ' 04 " 4: 7437 1 ' 07 " 5: abcde 1 ' 14 " 6: 0101 1 ' 14 " 7: 2070 1 ' 21 "	

圖 3.1.1、台灣數獨協會網站提供的數獨線上挑戰專區

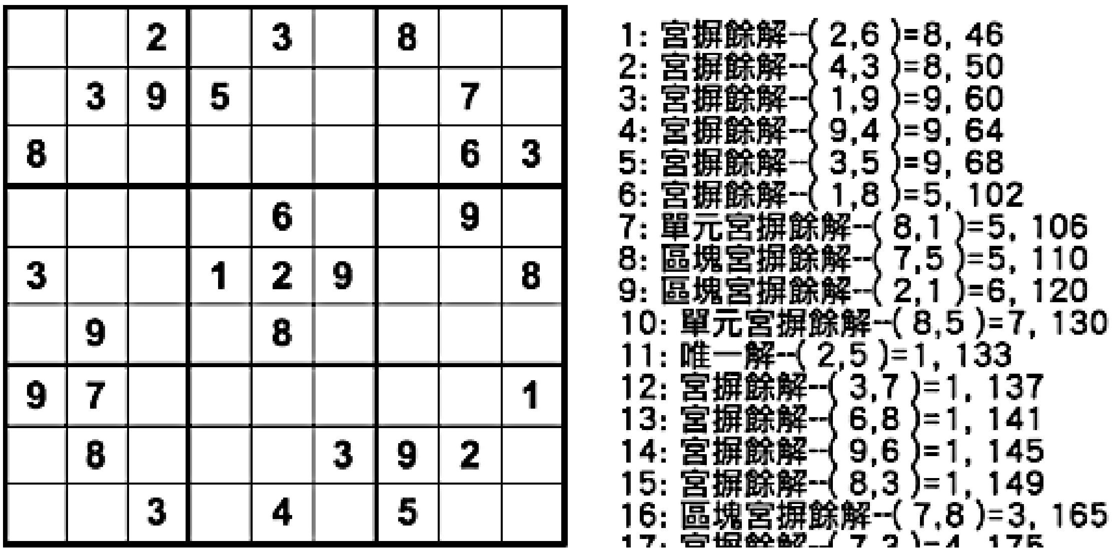

圖 3.1.2、台灣數獨協會網站提供的數獨線上解題程式

3.2 探討數獨解題成功率與難度之間的相關性

在利用解題成功率定義難度之前，須先觀察兩者之間的關聯，深入探討此方法的可行性。首先從五種難度的數獨題目與其平均解題成功率開始觀察，如

表 3.2.1 所示，難度一顆星的平均解題成功率 85.53%，難度兩顆星降為 75.09%，難度三顆星略降為 70.07%，難度四顆星降為 60.85%，而難度五顆星的平均解題成功率則大幅降低至 29.63%，由此可知解題成功率會隨著題目難度增加而下降。以平均數觀察的優點是每筆資料皆被計算，但卻容易受極端值影響，相較之下如果使用中位數可避免此困擾。此外無論是平均數或中位數都只能表示資料分布的中心，無法得知資料的分布狀況，所以還需觀察四分位數了解資料分散程度，因此製作資料庫中五種難度的數獨題目與解題成功率之間的五數綜合表，如

表 3.2.2 所示，由上到下為各種難度解題成功率的最大值、第三四分位數、中位數、第一四分位數和最小值，並藉由此表繪製盒形圖，如圖 3.2.1 所示，盒中的標記線表示中位數，盒頂代表第三四分位數，而盒底代表第一四分位數，亦表示盒型部份為中間 50%資料所在位置，可藉此觀察多數資料的特性，另外盒子兩端延伸線連接資料中最大值與最小值，可知是否有極端值存在。

表 3.2.1、題目難度與解題成功率平均數

解題成功率 / 難度	★	★★	★★★	★★★★	★★★★★
平均數	85.53%	75.09%	70.07%	60.85%	29.63%

表 3.2.2、解題成功率與題目難度之五數綜合

解題成功率 / 難度	★	★★	★★★	★★★★	★★★★★
最大值	94.44%	88.9%	86%	78.8%	66.7%
第三四分位數	89.43%	75%	70%	59.8%	29%
中位數	87.5%	74.6%	69.4%	59%	26%
第一四分位數	86.61%	73.5%	68.8%	58.4%	24.8%
最小值	63.38%	63.2%	51.8%	53.8%	15.3%

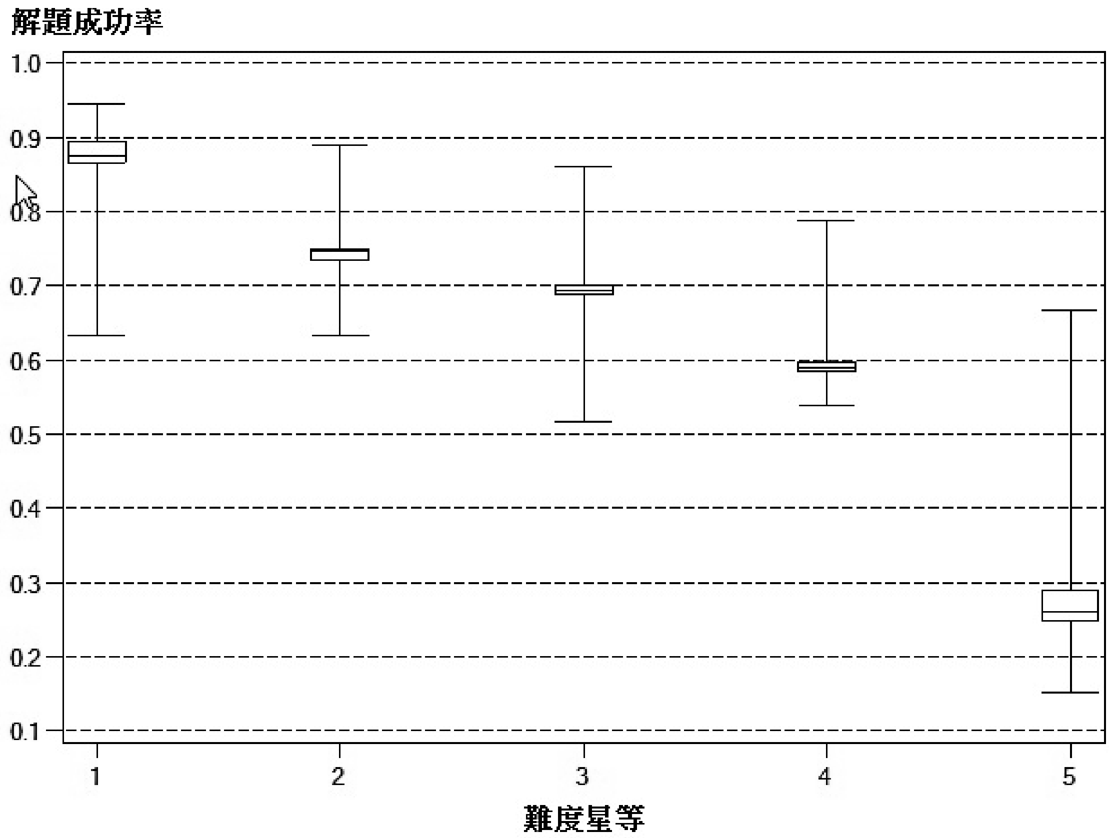

圖 3.2.1、解題成功率與題目難度盒形圖

由圖 3.2.1 的盒形圖可得知整體資料概況，並做出以下兩點分析：

(1) 解題成功率隨難度增加而下降

由圖 3.2.1 可觀察到隨著難度星等增加，盒型位置逐漸下降，代表數獨解題成功率因難度增加而下降，因此以解題成功率當作數獨難度指標確實可行。但並非以等差或等比下降，由圖 3.2.2 可清楚看到無論是中位數或平均數兩顆星與三顆星難度之間的解題成功率差異最小，僅有約 5 %的差異，而一顆星與兩顆星難度之間和三顆星與四顆星難度之間的解題成功率差距增為約 10%，但四顆星與五顆星難度之間的解題成功率差距為約 30%，由此可知玩家對台灣數獨協會網站上題目難度兩顆星與三顆星之間的差異較不易察覺，而對於四顆星與五顆星的題目難度差異有很深刻的感受。

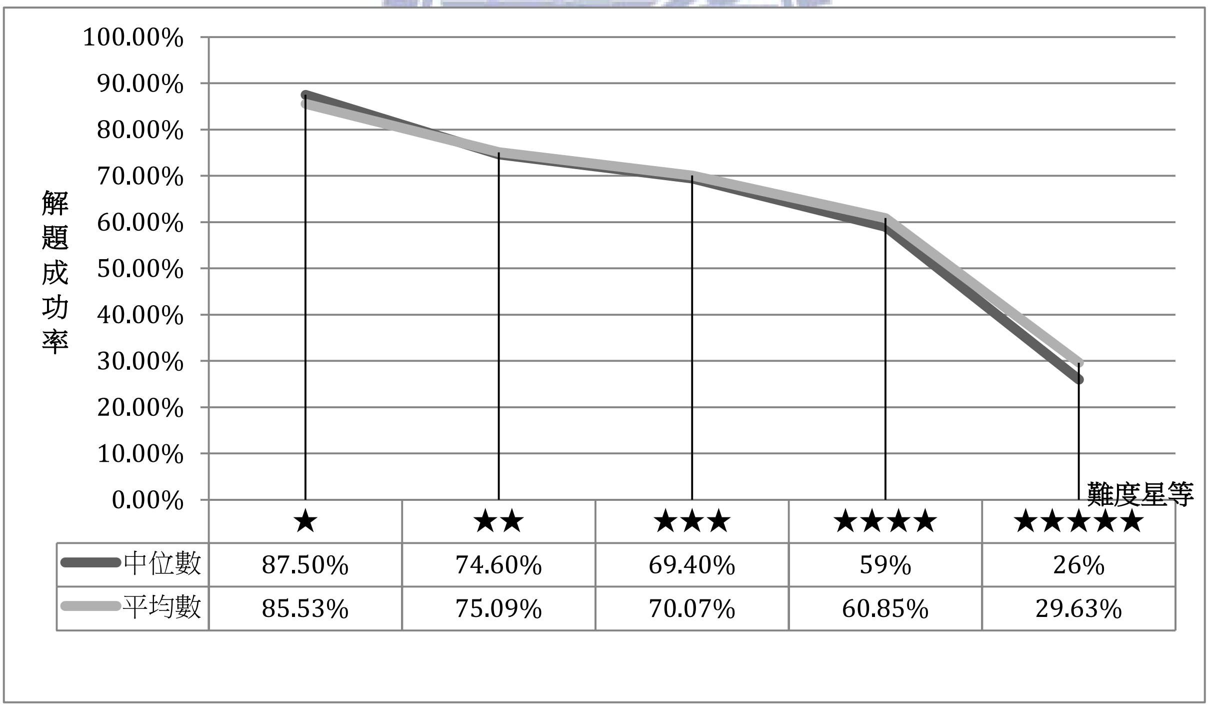

圖 3.2.2、各難度解題成功率中位數與平均數走勢圖

(2) 四分位距小，全距大

由圖 3.2.1 還可發現，無論是何種難度的盒形圖，盒形高度都很低，意即四分位距小，大多數的資料分布集中。然而，相較於四分位距，解題成功率的全距偏大，盒子向外的延伸線長，表示兩端資料分布鬆散。此現象代表在台灣數獨協會網站上同樣難度星等的題目中，大部份題目難度相當，但卻存在一些較難解或易解的題目於其中，造成玩家解題時，即使選擇同樣難度星等的題目，卻發生有時過於簡單過於困難的情況，挑戰程度差異甚大，且從表 3.2.3 可知此情形以難度為五星的題目最嚴重，全距達到 51.40%。

表 3.2.3、解題成功率與題目難度之全距與四分位距比較表

解題成功率 / 難度	★	★★	★★★	★★★★	★★★★★
全距	31.06%	25.70%	34.20%	25.00%	51.40%
四分位距	2.82%	1.50%	1.20%	1.40%	4.20%

由此可推斷，原先的難度分類方式與玩家對遊戲難度感受有所差距，電腦判定困難的題目，對玩家而言未必困難。 Zajac (2006) 證明數獨可視為物理問題來解析，因此本研究把數獨視為試題，並將古典測驗理論中定義試題難度的方法應用於數獨，即試題難易度等於解題成功率。而 Ebel & Frisbie (1991) 也以此難易度為指標將試題難度分為五個等級，如表 3.2.4 所示，解題成功率小於 0.2 稱為極困難，介於 0.2 到 0.4 之間稱為困難，介於 0.4 到 0.6 之間稱為難易適中，介於 0.6 到 0.8 之間稱為容易，最後大於 0.8 稱為極容易。本研究也將此分類方式應用於數獨難度分級，解題率小於 0.2 的題目訂為最

困難的五顆星難度，0.2 到 0.4 訂為四顆星，0.4 到 0.6 訂為三顆星，0.6 到 0.8 訂為兩顆星，最後大於 0.8 為最簡單的一顆星難度。本研究希望藉此定義難度和分級難度的方式，能接近玩家解數獨時對題目難度的真實感受。

表 3.2.4、難度等級表 (P = R / N * 100%, N:全體受試者人數, R:答對該題人數)

難度 (P)	難度等級
$P < 0.2$	極困難
$0.2 \leq P < 0.4$	困難
$0.4 \leq P < 0.6$	難易適中
$0.6 \leq P < 0.8$	容易
$P \geq 0.8$	極容易

3.3 預估數獨解題成功率

如採用解題成功率定義數獨題目難度，必須先有效率獲得每道題的解題成功率，利用玩家實際解題將過於耗時與耗費人力，因此本研究希望能找出不需真實玩家就能預估解題成功率的公式。

3.3.1 迴歸分析的定義

在基本預測方法中，迴歸分析是一種因果關係預測法，透過分析事物之間的因果關係和影響程度推測未來趨勢，一般以歷史資料找出預測對象和相關變數之間的相互關係，以此建立數學模型進行預測。本研究認為數獨解題率會受題目結構和解題策略影響，例

如當某些題目的題目結構較複雜或需要較高技巧才能解題時，有些玩家技巧或耐心不足造成解題失敗，導致解題率降低。因此本研究採用迴歸分析法預估數獨解題成功率，將分析資料庫中的數獨題目和題目結構建立迴歸模型。迴歸模型分為簡單線性迴歸和複迴歸，簡單線性迴歸用於單一自變數解釋一依變數，而複迴歸使用超過一個自變數解釋一依變數。然而，本研究認為解題成功率應與多項屬性有依存關係而非單項，因此採用複迴歸分析預測法。計算模型如下：

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \dots + b_k x_{ki} + \varepsilon \qquad \varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2) \text{ 且 } i = 1,2,\dots,n$$

y 為依變數，在此即為解題成功率，$x_1, x_2, \dots, x_k$ 為自變數，即與解題成功率相關的屬性，b_0 為常數項，$b_1, b_2, \dots, b_k$ 為迴歸係數，ε為誤差值。

3.3.2 自變數選擇方法

自變數選擇方法分為兩種，第一種為確認性指定，以理論實證、邏輯推理或專家共識為基礎，選擇加入迴歸模型的自變數。第二種為利用順序搜尋法，其分為三種：

1. 向前增加：依自變數顯著性高低逐次加入模型中。
2. 往後刪除：先將所有自變數加入模型中，在逐次刪去顯著性最小者，直到所有未達顯著性標準的自變數皆刪除為止。
3. 逐次估計：結合向前增加與往後刪除兩種方法，逐次加入與依變數相關性較高的自變數，接著檢視模型中是否有未達顯著性標準的自變數須刪除，直到模型中沒有未達顯著性標準的自變數。

另外還可將所有迴歸模式皆列入考慮，再使用以下準則篩選：

1. R^2 愈大愈好：

R^2 用來解釋迴歸模型的適配度，$R^2 = 0$ 代表自變數與依變數之間完全沒有線性關係，$R^2 \neq 0$ 代表依變數被自變數所解釋的比例。公式如下：

$$R^2 = 1 - \frac{SSe}{SSt}$$ ，*SSe* 為誤差變異量，*SSt* 為總變異量

2. R^2_{adj}愈大愈好：

R^2 容易被樣本大小影響而有高估的現象，因此大多數學者採用挑整後的 R^2，亦為將誤差變異量和總變異量皆除以自由度，公式如下：

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{\frac{SSe}{dfe}}{\frac{SSt}{dfe}}$$ ，*SSe* 為誤差變異量，*SSt* 為總變異量，*dfe* 為自由度

經此調整後可避免決定係數 R^2 被高估的現象。

3. Mallow Cp (Mallow 1973) 值愈小愈好，愈接近變數個數愈好：

Mallow Cp 值用來測量觀察資料之標準化的整體預測誤差均方。

本研究將採用逐步估計法選擇加入迴歸模型的自變數。

3.3.3 自變數選擇方向

本研究認為解題成功率可能與題目結構和解題策略皆有關係，因此將從這兩方面分別尋找自變數，找出何者對解題成功率有較高的解釋能力。

(1) 題目結構

資料庫中有從尤怪之家解題程式擷取的正確解題路徑，藉此可得到解題搜尋樹(圖 3.3.1)，樹根為遊戲初始狀態，找出所有可能的下一步後，由代表資料庫中的正確解題路徑的節點向下一層發展(圖中實線的路徑)。從搜尋樹中可計算出 m 個樹葉節點，其中

包含一個為正解的節點，其餘為搜尋過程中無法向下搜尋的死路節點，另外還包含 n 個非終端節點，代表搜尋過程中可往下繼續搜尋的分支節點。

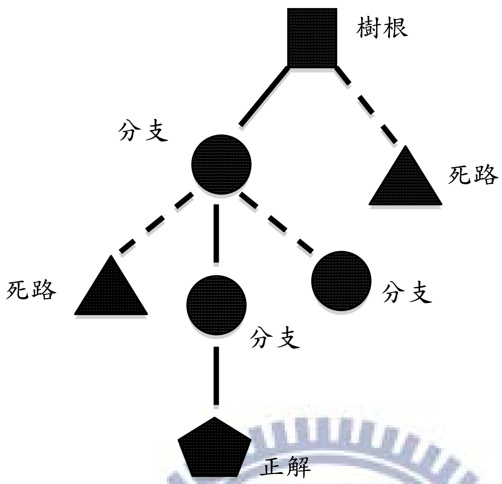

圖 3.3.1、解題搜尋樹

本研究認為搜尋樹中的死路節點數為影響解題成功率的重要屬性，如死路節點數量較多，玩家在題目結構中較容易碰到死路，不易往正確解題路徑前進，且在玩家經過多次失敗經驗後，會較缺乏耐心完成挑戰。另外，分支數也為影響解題成功率的重要屬性，如分支數過多，玩家較容易走到非正確解題路徑的岔路，因而降低解題成功率。因此，在題目結構部份，本研究將用分支節點數和死路節點數當作自變數進行迴歸分析。

(2) 解題策略

資料庫中除了有從尤怪之家解題程式擷取的正確解題路徑之外，亦有每步使用的解題策略，而解題策略可區分為基本技巧、進階技巧和猜測，因此本研究認為當題目需要使用較多進階技巧，或某些玩家不易想到的技巧時，此題解題成功率較低，而使用大量

基本技巧的題目，一般玩家皆可容易解謎，解題成功率會較高。因此本研究記下每題各個解題策略使用次數，以此當作解題策略部份的自變數。

3.3.4 共線性問題

共線性是指自變數之間的相關性太高，兩者提供的訊息過於相似，無法分辨個別變數效果，導致迴歸係數有很大誤差 (Pedhazur, 1982)。本研究將使用相關係數判定自變數兩兩之間的共線性，相關係數計算公式如下：

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2][\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2]}}$$

xi 為第 *i* 個 *x* 的數值，*yi* 為第 *i* 個 *y* 的數值，$\bar{x}$為 *x* 變數的平均數，$\bar{y}$為 *y* 變數的平均數。一般而言相關係數超過 0.7 即有潛在共線性，所以應避免模型中包含相關性過高的自變數。另外，還可使用變異數膨脹係數 (VIF) 或容忍值 (tolerance) 當作是否存在共線性的判斷標準，當 VIF 大於 10 或 tolerance 小於 0.1 表示有共線性問題。

3.3.5 殘差分析

殘差為自複迴歸方程式的預測與實際樣本之誤差。使用迴歸分析時，誤差項須同時符合三項基本統計假設：

1. 常態性：

   若資料呈現常態分配，誤差項也應屬於常態分配。一般常態分布可從莖葉圖與盒狀圖中觀察得知，在常態機率圖(圖 3.3.2)中的樣本點也將呈現接近 45°直線。此外，採用 Shapiro-Wilk 的 W 值與 Kolmogorov-Smirnov 的 D 值檢驗是否符合常態分布，

W 值是用於樣本數小於 50，D 值則用於樣本數大於 50，兩者的 p 值若小於 0.005，代表殘差項符合常態性分布。

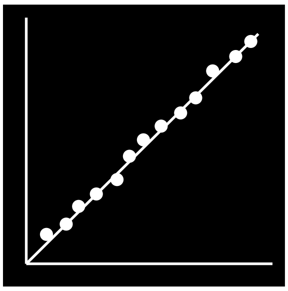

圖 3.3.2、常態機率圖

若殘差項非常態性分布則須做常態性轉換，轉換規則如下：

(a) 左偏：取平方根

(b) 右偏：取對數

(c) 低闊峰：取倒數

(d) 高尖峰：取平方

藉由以上轉換規則，可將原先非常態分布的殘差項轉換成常態分布。

2. 恆常性：

殘差項的變異數應為常數，不會呈遞曾遞減的形態。如誤差項符合此假設，在殘差圖(圖 3.3.3)中樣本點將呈水平帶狀。

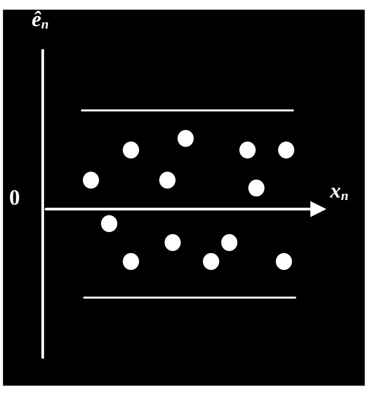

圖 3.3.3、殘差圖

3. 獨立性：誤差項應各自獨立，相互之間沒有依存關係，可使用 Durbin-Watson (D-W) 的統計量來檢測，DW 值範圍從 0 到 4，當 DW 值愈接近 2 時，殘差項間愈無相關；當 DW 值愈接近 0 時，殘差項間正相關愈強；當 DW 值愈接近 4 時，殘差項間負相關愈強。

3.3.6 檢定迴歸模型和迴歸係數

驗證所求得知迴歸模型使否具統計顯著性，一般使用 F 檢定。F 檢定將所有自變數加入計算式，判定應變數與所有自變數所成的集合間是否有顯著關係。F 值計算方法如下：

$$F=\frac{迴歸均方和}{誤差均方和}$$

計算出 F 值後使用 p 值法判定，若 p 值 $\leq\alpha$表示模型中的自變數對依變數有解釋能力。

此外還須驗證模型中的迴歸係數是否也具統計顯著性，一般使用 t 檢定。t 檢定是複迴歸分析中，用來檢定個別參數之顯著性的統計方法。t 值計算方法如下：

$$t=\frac{第i項迴歸係數}{第i項迴歸係數標準誤差}\quad i=1,2,\ldots,n$$

計算出 t 值後使用 p 值法判定，若 p 值 $\leq\alpha$表示此因變數的迴歸係數對模型有意義。

四、 研究結果

4.1 各難度星等題目分析

在進行整體迴歸分析之前，首先針對資料庫中五種難度星等的數獨題目進行分析，觀察不同難度題目和題目結構、解題技巧使用次數之間的差異，本研究皆採 Pearson 相關係數表達兩個變數之間的相關性。當相關係數為 0-0.25 之間表示兩者沒有或輕微相關，0.25-0.5 代表輕度相關，0.5-0.75 表示中度相關，0.75 以上代表強烈相關。

4.1.1 依題目結構分析各種難度星等的題目

從表 4.1.1、題目分析-題目結構可得知題目難度為星等一、星等二和星等三的解題成功率與分支節點數和死路節點數的相關性低，相關係數大約為 ±0.1，屬於沒有或輕微相關。難度星等四和星等五與分支節點數和死路節點數的相關性略微提高，難度星等四的解題成功率與分支節點數的相關係數為-0.394，與死路節點數的相關係數為 0.263，皆屬輕度相關。難度星等五的解題成功率與分支節點數的相關係數為-0.430，與死路節點數的相關係數為 0.364，亦皆屬輕度相關。由此可知，數獨題目難度愈高，解題成功率與分支節點數和死路節點數相關性愈高，代表愈難的數獨題目，其分支節點數與死路節點數的多寡，對解題成功率的影響愈深。除了難度星等一與星等二之外，其他難度題目的解題成功率與分支節點數的相關性皆高於死路節點數，代表分支節點數對於數獨的解題成功率影響高於死路節點數。此外，無論何種難度的數獨題目，解題成功率與分支節點數皆呈現負相關，代表分支節點愈少解題成功率愈高。另外，除了難度星等一之外，其他難度的數獨題目解題成功率與死路節點數皆成正相關，表示死路節點數愈多，解題

成功率愈高。

表 4.1.1、題目分析-題目結構

	★	★★	★★★	★★★★	★★★★★
分支節點數	-0.151	-0.069	-0.145	-0.394	-0.430
死路節點數	-0.201	0.109	0.137	0.263	0.364

從表 4.1.2 可得知，難度星等一、星等二和星等三的解題成功率與解題技巧使用次數相關性最高的皆為各式宮摒餘解，相關係數介於±0.2 之間，屬於沒有或輕微相關。除此之外，其他與解題成功率相關性較高的解題技巧也亦為各式宮摒餘解和數獨最基本技巧：唯一解，這表示難度星等一、星等二和星等三的題目解題成功率與數獨的兩種基本解題技巧使用次數較為相關。但與難度星等四的解題成功率最相關的解題技巧不再是宮摒餘解，而是進階解題技巧：數對唯餘解，且相關係數為-0.385，屬於輕度相關，相關性較之前提高。而其他與難度星等四的解題成功率相關性較高的解題技巧為區塊宮摒餘解、唯餘解和唯一解，其中唯餘解亦屬於進階解題技巧，代表除了基本技巧之外，進階技巧使用次數從難度星等四開始也與解題成功率相關。而與難度星等五解題成功率最相關的解題技巧為猜測，是當使用各式各樣解題技巧都無法找出解答時採用的方法，相關係數為-0.459，雖仍屬於輕度相關，但為所有難度星等解題成功率與解題技巧使用次數之中相關性最高。其他與難度星等五解題成功率相關性較高的解題技巧為三餘解、數對唯餘解和區塊宮摒餘解，除區塊宮摒餘解外其餘皆為進階技巧。由此可知，除了猜測對於難度星等五的解題成功率有最大的影響之外，進階技巧使用次數影響大於基本技巧。

表 4.1.2、題目分析-解題技巧

	★	★★	★★★	★★★★	★★★★★
相關性　高	宮摒餘解 (-0.255)	區塊宮摒餘解 (-0.228)	區塊宮摒餘解 (-0.291)	數對唯餘解 (-0.385)	猜測 (-0.459)
↓	唯一解 (-0.073)	宮摒餘解 (0.185)	宮摒餘解 (0.249)	區塊宮摒餘解 (0.341)	三餘解 (0.433)
↓	區塊宮摒餘解 (0.049)	唯一解 (-0.081)	單元宮摒餘解 (-0.221)	唯餘解 (-0.323)	數對唯餘解 (-0.410)
相關性　低	單元宮摒餘解 (0.043)	單元宮摒餘解 (0.042)	唯一解 (-0.031)	唯一解 (0.309)	區塊宮摒餘解 (0.316)

4.2 迴歸分析

本研究採用 SPSS 統計軟體進行迴歸分析，資料庫中的 500 筆數獨解題資訊，為使迴歸分析結果更為準確，篩選其中挑戰次數超過 100 次的 163 筆資料作為樣本。本章將分節討論數獨題目結構和解題策略之迴歸分析結果，最後比較何者較適用於預估的解題成功率。

4.2.1　題目結構

以題目結構的相關屬性為自變數的迴歸分析中，本研究採用分支節點數與死路節點數當作自變數。在第一次迴歸分析中，殘差不符合常態性假定，屬右偏分布，須使用次方轉換法轉換所有自變數使其能符合常態性檢定。經多次測試後發現，當所有自變數取

對數後，殘差即符合常態性假設，因此以下為使用取對數後的分支節點數和死路節點數當作自變數進行的第二次迴歸分析的結果。以下為使用 SPSS 進行迴歸分析後輸出結果：

表 4.2.1 為各變項的平均數、標準離差和樣本數。

表 4.2.1、迴歸分析 1-敘述統計

	平均數	標準離差	個數
解題成功率	.4841	.22187	163
分支節點數	3.6065	.07540	163
死路節點數	2.3705	.20271	163

表 4.2.2 顯示被選入迴歸模型的自變數，分支節點數與死路節點數皆符合顯著性，因此兩者者皆被選入。

表 4.2.2、迴歸分析 1-選入\刪除的變數

模式	選入的變數	刪除的變數	方法
1	分支節點數	.	逐步迴歸分析法 (準則:F-選入的機率 <= .050， F-刪除的機率 >= .100)。
2	死路節點數	.	逐步迴歸分析法 (準則:F-選入的機率 <= .050， F-刪除的機率 >= .100)。

a. 依變數: 解題成功率

表 4.2.3 為迴歸模型摘要，其中調過後的 R 平方代表自變數對依變數的解釋程度，兩種模式下各為 0.497 和 0.534，其中 0.534 (=0.497+0.39)為累積解釋量。另外從 Durbin-Watson 檢定可檢測殘差是否符合獨立性，表中 DW 值為 1.632 接近 2，由此可知符合獨立性假設。

表 4.2.3、迴歸分析 1-迴歸模型摘要

模式	R	R 平方	調過後的 R 平方	估計的標準誤	變更統計量		
					R 平方改變量	F 改變	df1
1	.707[a]	.500	.497	.15734	.500	161.118	1
2	.735[b]	.540	.534	.15149	.039	13.688	1

a. 預測變數:(常數), 分支節點數

b. 預測變數:(常數), 分支節點數, 死路節點數

c. 依變數: 解題成功率

模式摘要[c]

模式	變更統計量		Durbin-Watson
	df2	顯著性 F 改變	檢定
1	161	.000	
2	160	.000	1.632

c. 依變數: 解題成功率

表 4.2.4 為變異數分析統計表，對於模式一之 R^2 (0.497) ，F 檢定值為 161.118，p 值為 0.000；對於模式二之 R^2 (0.534) ，F 檢定值為 93.751，p 值為 0.000，兩模式下均達顯著，顯示以上迴歸效果，皆具統計上的意義。

表 4.2.4、迴歸分析 1-變異數分析

模式		平方和	df	平均平方和	F	顯著性
1	迴歸	3.989	1	3.989	161.118	.000[a]
	殘差	3.986	161	.025		
	總數	7.975	162			
2	迴歸	4.303	2	2.151	93.751	.000[b]
	殘差	3.672	160	.023		
	總數	7.975	162			

a. 預測變數:(常數), 分支節點數

b. 預測變數:(常數), 分支節點數, 死路節點數

c. 依變數: 解題成功率

表 4.2.5 為迴歸係數分析表，模式一顯示進入的自變數為分支節點數，beta 值為-0.707，表示分支節點數為解題成功率的顯著變數，分支節點數愈多，解題成功率愈低，且檢定達顯著性，模式二再加入一個新的預測變數(死路節點數)，其 beta 值為 0.265，而分支節點數的 beta 值升為-0.531，表示經過排除共變之後的淨預測程度，t 檢定亦達到顯著水準。另外，還須觀察自變數之間的共線性問題，模式二中的允差為 0.559 大於 0.1，VIF 為 1.789 小於 10，因此自變數間共線性不嚴重。

表 4.2.5、迴歸分析 1-迴歸係數分析表

模式		未標準化係數		標準化係數		
		B 之估計值	標準誤差	Beta 分配	t	顯著性
1	(常數)	7.989	.591		13.509	.000
	分支節點數	-2.081	.164	-.707	-12.693	.000
2	(常數)	5.430	.896		6.061	.000
	分支節點數	-1.562	.211	-.531	-7.401	.000
	死路節點數	.291	.079	.265	3.700	.000

a. 依變數: 解題成功率

模式		相關			共線性統計量	
		零階	偏	部分	允差	VIF
1	(常數)					
	分支節點數	-.707	-.707	-.707	1.000	1.000
2	(常數)					
	分支節點數	-.707	-.505	-.397	.559	1.789

死路節點數	.618	.281	.198	.559	1.789

a. 依變數: 解題成功率

各別變數間的共線性還可由表 4.2.6 的 Pearson 相關係數分析表觀察，從表中得知分支節點數與死路節點數間相關係數為-0.664，絕對值未超過 0.7，因此兩者共線性不嚴重。

表 4.2.6、迴歸分析 1-Pearson 相關係數分析表

		解題成功率	分支節點數	死路節點數
Pearson 相關	解題成功率	1.000	-.707	.618
	分支節點數	-.707	1.000	-.664
	死路節點數	.618	-.664	1.000
顯著性(單尾)	解題成功率	.	.000	.000
	分支節點數	.000	.	.000
	死路節點數	.000	.000	.
個數	解題成功率	163	163	163
	分支節點數	163	163	163
	死路節點數	163	163	163

表 4.2.7 為整體模型共線性診斷表，模式一中只有一個變數，因此沒有共線性問題，模式二中只有分支節點數的變異數比例超過 0.7(0.99)，因此自變項間的線性重合不嚴重。

表 4.2.7、迴歸分析 1-整體模型共線性診斷表

模式	維度	特徵值	條件指標	變異數比例		
				(常數)	分支節點數	死路節點數
1	1	2.000	1.000	.00	.00	
	2	.000	95.964	1.00	1.00	
2	1	2.994	1.000	.00	.00	.00

	2	.006	22.742	.00	.01	.46
	3	.000	172.118	1.00	.99	.54

a. 依變數: 解題成功率

表 4.2.8 殘差統計表，用來檢定極端值的存在，標準化後的殘差絕對值若大於 1.96，代表偏離值，表中標準殘差最小值為-2.208，標準殘差最大值為 2.726，由此可知模型於兩端皆存在偏離值。

表 4.2.8、迴歸分析 1-殘差統計表

	最小值	最大值	平均數	標準離差	個數
預測值	.1690	.9201	.4841	.16298	163
殘差	-.33448	.41295	.00000	.15055	163
標準預測值	-1.933	2.675	.000	1.000	163
標準殘差	-2.208	2.726	.000	.994	163

a. 依變數: 解題成功率

圖 4.2.1 為殘差直方圖，可檢驗殘差項是否符合常態性假設，由此圖中可得知此模型大致符合常態性假設。

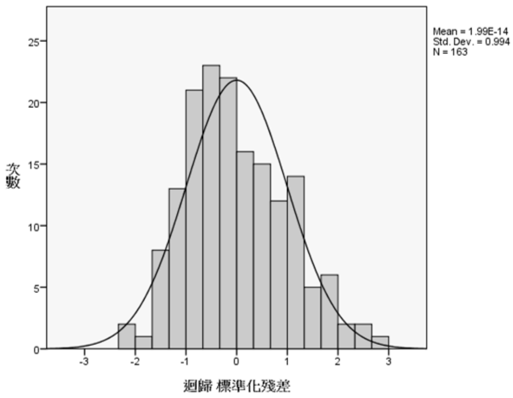

圖 4.2.1、迴歸分析 1-殘差直方圖

圖 4.2.2 為殘差常態機率圖，亦可檢驗殘差項是否符合常態性，由圖中可得知樣本點排列近似於 45°直線，因此符合常態性假設。

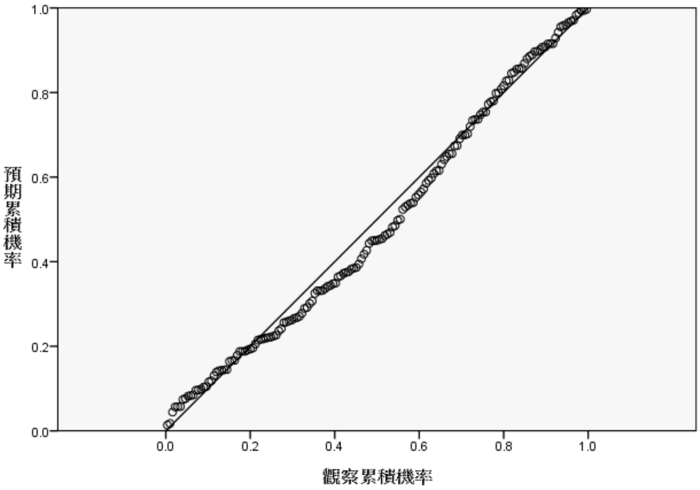

圖 4.2.2、迴歸分析 1-殘差常態機率圖

圖 4.2.3 為殘差圖，可檢驗殘差項的恆常性，由於途中樣本點沒有遞增或遞減的現象，因此認定此模型符合恆常性假設。

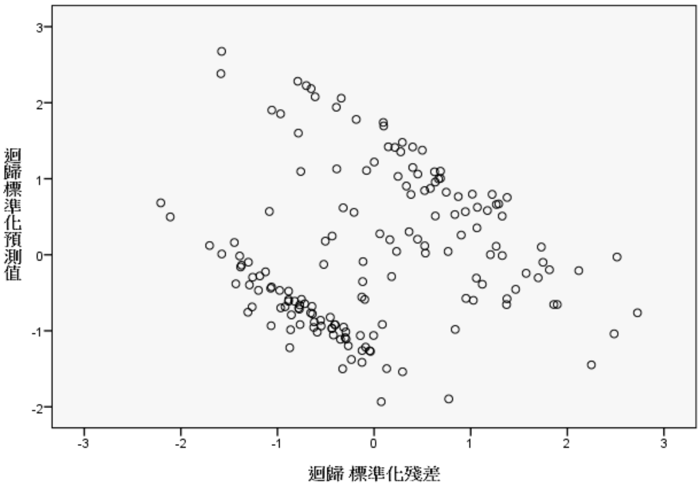

圖 4.2.3、迴歸分析 1-殘差圖

由以上 SPSS 進行迴歸分析的輸出結果可得以下迴歸式：

$$解題成功率 = 5.430 + (-1.562) \times log(分支節點數) + 0.291 \times log(死路節點數)$$

$$(\text{p 值} = 0.000) \qquad\qquad (\text{p 值} = 0.000)$$

F 檢定顯著性 = 0.000　　R^2_{adj} = 0.534　　估計標準誤差 = 0.15149

4.2.2 解題策略

以解題策略的相關屬性為自變數的迴歸分析中，本研究採用每種解題策略使用次數當作自變數。在第一次迴歸分析中，殘差不符合常態性假定，屬右偏分布，須使用次方轉換法轉換所有自變數使其能符合常態性檢定。經測試後發現，當所有自變數取對數後，殘差即符合常態性假設，因此以下為使用取對數後的各種解題策略使用次數當作自變數進行的第二次迴歸分析的結果。以下為使用 SPSS 進行迴歸分析後輸出結果：

表 4.2.9 為各變項的平均數、標準離差和樣本數。

表 4.2.9、迴歸分析 2-敘述統計

	平均數	標準離差	個數
解題成功率	.4841	.22187	163
唯一解	1.2286	.09838	163
宮摒餘解	1.3450	.11625	163
區塊宮摒餘解	.4495	.30982	163
單元宮摒餘解	.1242	.18971	163
二餘解	.0000	.00000	163
三餘解	.0122	.06367	163
四餘解	.0169	.07667	163
數對摒除解	.0135	.07502	163

數對卡位解	.0018	.02358	163
區塊數對唯餘解	.0074	.04672	163
數對唯餘解	.6034	.56582	163
唯餘解	.0074	.04672	163
矩形摒除解	.0000	.00000	163
數偶摒除解	.0037	.03324	163
猜測	.0456	.13032	163

表 4.2.10 顯示符合顯著性而被選入迴歸模型的自變數，包括數對唯餘解、唯一解和猜測。

表 4.2.10、迴歸分析 2-選入\刪除的變數

模式	選入的變數	刪除的變數	方法
1	數對唯餘解	.	逐步迴歸分析法 (準則:F-選入的機率 <= .050，F-刪除的機率 >= .100)。
2	唯一解	.	逐步迴歸分析法 (準則:F-選入的機率 <= .050，F-刪除的機率 >= .100)。
3	猜測	.	逐步迴歸分析法 (準則:F-選入的機率 <= .050，F-刪除的機率 >= .100)。

a. 依變數: 解題成功率

表 4.2.11 為迴歸模型摘要，其中調過後的 R 平方代表自變數對依變數的解釋程度，三種模式下各為 0.807、0.819 和 0.828，有逐漸提升的趨勢。另外從 Durbin-Watson 檢定可檢測殘差是否符合獨立性，表中 DW 值為 1.842 接近 2，由此可知符合獨立性假設。

表 4.2.11、迴歸分析 2 迴歸模型摘要

模式					變更統計量		
	R	R 平方	調過後的 R 平方	估計的標準誤	R 平方改變量	F 改變	df1

1	.899[a]	.808	.807	.09746	.808	678.510	1
2	.906[b]	.821	.819	.09438	.013	11.682	1
3	.912[c]	.832	.828	.09192	.010	9.690	1

a. 預測變數:(常數), 數對唯餘解

b. 預測變數:(常數), 數對唯餘解, 唯一解

c. 預測變數:(常數), 數對唯餘解, 唯一解, 猜測

d. 依變數: 解題成功率

模式	變更統計量		Durbin-Watson
	df2	顯著性 F 改變	檢定
1	161	.000	
2	160	.001	
3	159	.002	1.842

d. 依變數: 解題成功率

表 4.2.12 為變異數分析統計表，三種模式下 F 檢定的 p 值均達顯著，顯示以上迴歸效果，皆具統計上的意義。

表 4.2.12、迴歸分析 2-變異數分析

模式		平方和	df	平均平方和	F	顯著性
1	迴歸	6.445	1	6.445	678.510	.000[a]
	殘差	1.529	161	.009		
	總數	7.975	162			
2	迴歸	6.549	2	3.275	367.605	.000[b]
	殘差	1.425	160	.009		
	總數	7.975	162			

3	迴歸	6.631	3	2.210	261.610	.000[c]
	殘差	1.343	159	.008		
	總數	7.975	162			

a. 預測變數:(常數), 數對唯餘解

b. 預測變數:(常數), 數對唯餘解, 唯一解

c. 預測變數:(常數), 數對唯餘解, 唯一解, 猜測

d. 依變數: 解題成功率

表 4.2.13 為迴歸係數分析表，模式一顯示進入的自變數為數對唯餘解，beta 值為-0.899，表示數對唯餘解使用次數為解題成功率的顯著變數，解使用次數愈多，解題成功率愈低，且檢定達顯著性，模式二再加入一個新的預測變數(唯一解)，其 beta 值為-0.207，而數對為解使用次數的 beta 值降為-1.071，表示經過排除共變之後的淨預測程度，t 檢定亦達到顯著水準，接著繼續加入猜測，其 beta 值為-0.107，數對唯餘解的 beta 值降為-1.040，唯一解的 beta 值降為-0.211。另外，還須觀察自變數之間的共線性問題，三種模式中的允差皆大於 0.1，VIF 小於 10，因此自變數間共線性不嚴重。

表 4.2.13、迴歸分析 2-迴歸係數分析表

模式		未標準化係數		標準化係數		
		B 之估計值	標準誤差	Beta 分配	t	顯著性
1	(常數)	.697	.011		62.331	.000
	數對唯餘解	-.353	.014	-.899	-26.048	.000
2	(常數)	1.310	.180		7.288	.000
	數對唯餘解	-.420	.024	-1.071	-17.721	.000
	唯一解	-.466	.136	-.207	-3.418	.001
3	(常數)	1.324	.175		7.562	.000
	數對唯餘解	-.408	.023	-1.040	-17.400	.000

唯一解	-.477	.133	-.211	-3.590	.000
猜測	-.183	.059	-.107	-3.113	.002

a. 依變數: 解題成功率

模式		共線性統計量	
		允差	VIF
1	(常數)		
	數對唯餘解	1.000	1.000
2	(常數)		
	數對唯餘解	.306	3.271
	唯一解	.306	3.271
3	(常數)		
	數對唯餘解	.297	3.368
	唯一解	.306	3.273
	猜測	.889	1.125

a. 依變數: 解題成功率

各別變數間的共線性還可由表 4.2.14 的 Pearson 相關係數分析表觀察，其中唯一解和宮摒餘解使用次數間的相關係數為 0.810，數對唯餘解和唯一解使用次數間相關係數為-0.833 和數對唯餘解和宮摒餘解使用次數間相關係數為-0.846，三者絕對值皆超過 0.7，代表唯一解、宮摒餘解和數對唯餘解之間具較高相關性。

表 4.2.14、迴歸分析 2-Pearson 相關係數分析表(節錄)

		解題成功率	唯一解	宮摒餘解	區塊宮摒餘解	單元宮摒餘解	二餘解	三餘解
Pearson 相關	解題成功率	1.000	.686	.702	-.080	.005	.	-.064
	唯一解	.686	1.000	.810	-.047	-.026	.	-.270
	宮摒餘解	.702	.810	1.000	-.245	-.174	.	-.233
	區塊宮摒餘解	-.080	-.047	-.245	1.000	.178	.	.150

	單元宮摒餘解	.005	-.026	-.174	.178	1.000	.	-.006
	二餘解	.	.	.	.	.	1.000	.
	三餘解	-.064	-.270	-.233	.150	-.006	.	1.000
	四餘解	-.112	-.108	-.106	.053	.031	.	.139
	數對摒除解	-.193	-.187	-.181	-.121	-.119	.	.082
	數對卡位解	-.074	-.066	-.157	.007	.199	.	-.015
	區塊數對唯餘解	-.173	-.161	-.151	-.092	-.041	.	-.030
	數對唯餘解	-.899	-.833	-.846	.055	.033	.	.181
	唯餘解	-.062	.098	-.046	-.047	-.104	.	-.030
	矩形摒除解	.	.	.	.	.	.	.
	數偶摒除解	-.107	-.132	-.166	-.054	.015	.	-.021
	猜測	-.391	-.290	-.194	-.072	-.151	.	-.067

		四餘解	數對摒除解	數對卡位解	區塊數對唯餘解	數對唯餘解	唯餘解	矩形摒除解
Pearson 相關	解題成功率	-.112	-.193	-.074	-.173	-.899	-.062	.
	唯一解	-.108	-.187	-.066	-.161	-.833	.098	.
	宮摒餘解	-.106	-.181	-.157	-.151	-.846	-.046	.
	區塊宮摒餘解	.053	-.121	.007	-.092	.055	-.047	.
	單元宮摒餘解	.031	-.119	.199	-.041	.033	-.104	.
	二餘解	.	.	.	.	.	.	.
	三餘解	.139	.082	-.015	-.030	.181	-.030	.
	四餘解	1.000	-.040	-.017	-.035	.141	-.035	.
	數對摒除解	-.040	1.000	-.014	.342	.201	-.029	.
	數對卡位解	-.017	-.014	1.000	-.012	.094	-.012	.
	區塊數對唯餘解	-.035	.342	-.012	1.000	.176	-.025	.
	數對唯餘解	.141	.201	.094	.176	1.000	.069	.
	唯餘解	-.035	-.029	-.012	-.025	.069	1.000	.

	矩形摒除解	.	.	.	.	.	.	1.000
	數偶摒除解	-.025	-.020	-.009	-.018	.135	-.018	.
	猜測	.034	-.063	-.028	.036	.332	-.056	.

		數偶摒除解	猜測
Pearson 相關	解題成功率	-.107	-.391
	唯一解	-.132	-.290
	宮摒餘解	-.166	-.194
	區塊宮摒餘解	-.054	-.072
	單元宮摒餘解	.015	-.151
	二餘解	.	.
	三餘解	-.021	-.067
	四餘解	-.025	.034
	數對摒除解	-.020	-.063
	數對卡位解	-.009	-.028
	區塊數對唯餘解	-.018	.036
	數對唯餘解	.135	.332
	唯餘解	-.018	-.056
	矩形摒除解	.	.
	數偶摒除解	1.000	-.039
	猜測	-.039	1.000

表 4.2.15 為整體模型共線性診斷表，在模式二中數對唯餘解和唯一解變異數比例皆超過 0.7，但數對唯餘解的變異數比例為超過 0.8，因此僅為輕微共線問題。在模式三中沒有兩項以上變異數比例超過 0.7，因此自變項間較無共線問題。

表 4.2.15、迴歸分析 2-整體模型共線性診斷表

模式	維度	特徵值	條件指標	變異數比例			
				(常數)	數對唯餘解	唯一解	猜測
1	1	1.730	1.000	.13	.13		
	2	.270	2.534	.87	.87		
2	1	2.615	1.000	.00	.02	.00	
	2	.384	2.610	.00	.27	.00	
	3	.001	53.918	1.00	.72	1.00	
3	1	2.829	1.000	.00	.01	.00	.03
	2	.832	1.844	.00	.00	.00	.77
	3	.338	2.894	.00	.30	.00	.20
	4	.001	56.100	1.00	.69	1.00	.00

a. 依變數: 解題成功率

表 4.2.16 殘差統計表，用來檢定極端值的存在，標準化後的殘差絕對值若大於 1.96，代表偏離值，表中標準殘差最小值為-2.610，標準殘差最大值為 2.823，由此可知模型兩端皆存在偏離值。

表 4.2.16、迴歸分析 2-殘差統計表

	最小值	最大值	平均數	標準離差	個數
預測值	.1829	.7374	.4841	.20232	163
殘差	-.23990	.25945	.00000	.09106	163
標準預測值	-1.489	1.252	.000	1.000	163
標準殘差	-2.610	2.823	.000	.991	163

a. 依變數: VAR00001

	最小值	最大值	平均數	標準離差	個數
預測值	.1829	.7374	.4841	.20232	163
殘差	-.23990	.25945	.00000	.09106	163
標準預測值	-1.489	1.252	.000	1.000	163
標準殘差	-2.610	2.823	.000	.991	163

圖 4.2.4 為殘差直方圖，可檢驗殘差項是否符合常態性假設，由此圖中可得知此模型大致符合常態性假設。

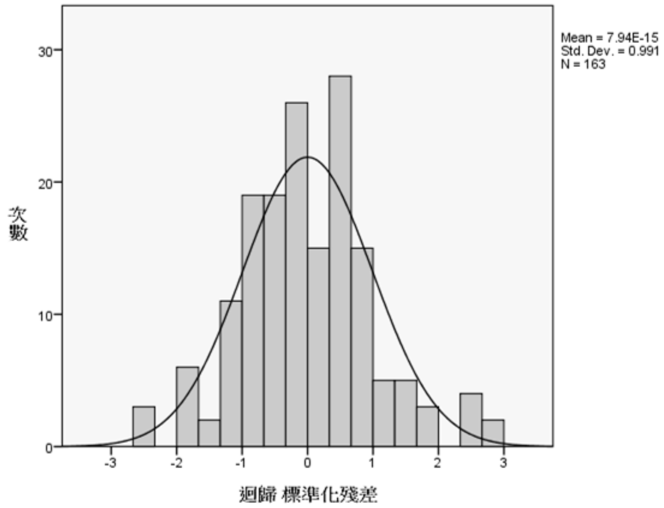

圖 4.2.4、迴歸分析 2-殘差直方圖

圖 4.2.5 為殘差常態機率圖，可檢驗殘差項是否符合常態性，由圖中可得知樣本點排列近似於 45°直線，因此符合常態性假設。

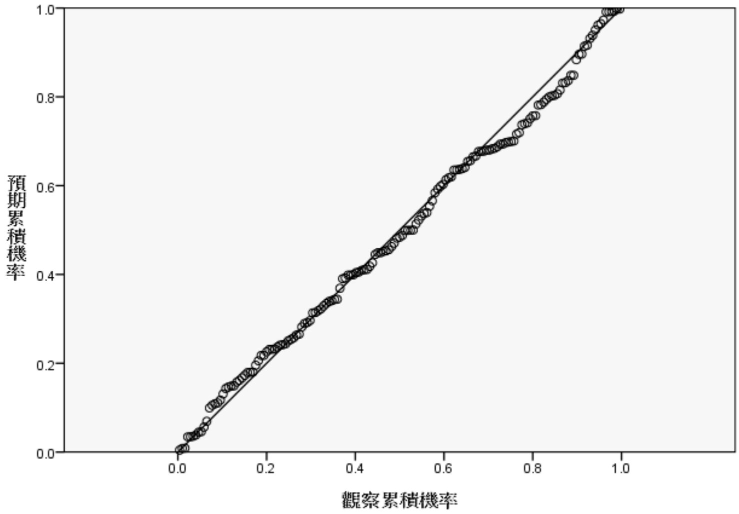

圖 4.2.5、迴歸分析 2-殘差常態機率圖

圖 4.2.6 為殘差圖，可檢驗殘差項的恆常性，由於途中樣本點沒有遞增或遞減的現象，因此認定此模型符合恆常性假設。

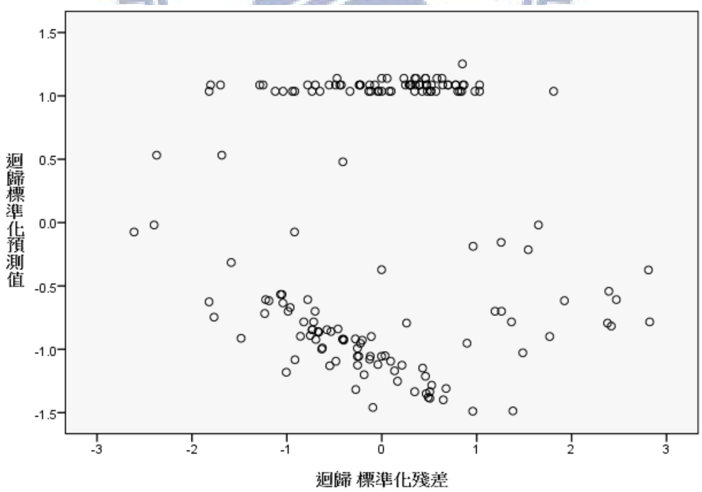

圖 4.2.6、迴歸分析 2-殘差圖

由以上 SPSS 進行迴歸分析的輸出結果可得以下迴歸式：

(p 值=0.000)

$$解題成功率 = 1.324 + (-0.408) \times log(數對唯餘解使用次數) + (-0.477) \times log(唯一解使用次數) + (-0.183) \times log(猜測使用次數)$$

(p 值 = 0.000) (p 值 = 0.002)

F 檢定顯著性 = 0.000 R^2_{adj} = 0.828 估計標準誤差 = 0.09192

4.3 迴歸分析結果驗證

驗證迴歸分析結果目的在於確認採用的樣本是否可以代表母體，因此本研究另外收集 100 份樣本進行迴歸分析，如分析結果與之前結果沒有顯著差異，及代表樣本有一致性，先前所得的迴歸分析模式可代表母體。

4.3.1 題目結構

以新收集的 100 份樣本進行迴歸分析，如同之前題目結構的變項：分支節點數和死路節點數取對數後才符合迴歸分析的假設， 最後得到的迴歸模式如下：

$$解題成功率 = 5.041 + (-1.5) \times log(分支節點數) + 0.361 \times log(死路節點數)$$

(p 值 = 0.000) (p 值 = 0.000)

F 檢定顯著性 = 0.000 R^2_{adj} = 0.565 估計標準誤差 = 0.14633

與之前結果沒有顯著差異，因此可知先前的迴歸模式成立。

4.3.2 解題策略

以新收集的 100 份樣本進行迴歸分析，如同之前解題策略的變項：各種解題技巧使用次數取對數後才符合迴歸分析的假設， 最後得到的迴歸模式如下：

(p 值=0.000)

$$解題成功率 = 1.324 + (-0.428) \times log(數對唯餘解使用次數) + (-0.497) \times log(唯一解使用次數) + (-0.111) \times log(猜測使用次數)$$

(p 值 = 0.000) (p 值 = 0.002)

F 檢定顯著性 = 0.000 R^2_{adj} = 0.881 估計標準誤差 = 0.07919

與之前結果沒有顯著差異，因此可知先前的迴歸模式成立。

4.4 結果比較

表 3.2.1 為以上兩種迴歸分析比較表，兩者的 R^2 皆達到顯著性，因此皆具統計上意義。接著比較兩種迴歸模型的 R^2_{adj}，由題目結構的相關屬性作為自變數進行迴歸分析的 R^2_{adj} 為 0.534，表示使用分支節點和死路節點數預測解題成功率時的解釋能力為 53.4%，而由解題策略的的相關屬性作為自變數進行迴歸分析的 R^2_{adj} 為 0.828，表示使用數對唯餘解、唯一解和猜測使用次數預測解題成功率時的解釋能力為 82.8%。由此可知，解題策略使用次數較適用於預估解題成功率。

表 4.4.1、迴歸分析比較表

	自變數	R^2_{adj}	F 檢定顯著性
題目結構	分支節點數、死路節點數	0.534	0.000
解題策略	數對唯餘解、唯一解、猜測次數	0.828	0.000

4.5 分析普通與高階遊戲使用技巧

由 4.1 節可得知，難度星等五的數獨題目與難度星等一、二、三和四的題目在難度上和技巧使用上有明顯的區別，因此在此節中將難度一到四星等和難度五星等分開作迴歸分析（以解題策略為變項），觀察與原先利用解題策略所得的迴歸分析模式之間的差異。

難度一到四星等所得迴歸模型：

$$\textit{解題成功率} = -0.386 + 0.761 \times log(\textit{宮摒餘解使用次數}) \quad (\text{p 值} = 0.000)$$

F 檢定顯著性 = 0.000 R^2_{adj} = 0.362 估計標準誤差 = 0.05722

難度星等五所得迴歸模型：

(p 值=0.000)

$$\textit{解題成功率} = 0.974 + 0.341 \times log(\textit{區塊數對唯餘解使用次數})$$

(p 值=0.000) (p 值=0.000)

$$+ (-0.321) \times log(\textit{三餘解使用次數}) + (-0.272) \times log(\textit{猜測使用次數})$$

$$+0.117 \times log(數對摒餘解使用次數)$$

(p 值=0.000)

F 檢定顯著性 = 0.000 R^2_{adj} = 0.382 估計標準誤差 = 0.08281

從以上兩迴歸模型可發現，R^2_{adj}較先前下降許多，由此可推測將難度星等分開進行迴歸分析會降低迴歸模型的解釋力，原因可能在於缺少影響解題成功率的關鍵變項，例如只利用難度星等一到四進行迴歸分析，缺少了難度星等五的數據，使迴歸分析時不易辨別出解題成功率較低的題目是被何種變項影響。又例如難度星等五進行迴歸分析，缺少難度星等一到四的數據，不易辨識出解題成功率較高的題目是被何種變項影響。因此，進行迴歸分析時，樣本的選擇將會影響迴歸模型的解釋力，需謹慎的挑選能代表整個母體的樣本。此外，由難度星等一到四所得的迴歸模型發現，變項只有常數項和宮摒餘解使用次數，而由難度星等五所得的迴歸模型中的變數項皆為進階解題技巧使用次數，由此可得知，難度星等一到四的題目解題成功率與基本技巧使用次數較具關連性，而難度星等五的解題成功率與進階技巧使用次數較具關連性。

4.6 討論

在台灣數獨協會網站上的線上挑戰專區可任由玩家選擇難度進行挑戰，此模式會造成網站上統計的解題成功率不夠客觀。因為高階玩家大多選擇挑戰難度較高的題目，而低階玩家不會選擇，此狀況會造成難度較高的題目解題成功率偏高。另外，因為高階玩家可能較不會選擇容易的題目，造成難度較低的題目解題成功率會偏低。因此，如果能直接利用解題技巧的使用次數預估解題成功率，則可避免解題成功率不夠準確情形。

五、 結論與未來展望

本研究根據古典測驗理論和參考過去遊戲難度相關研究，採用解題成功率做為數獨難度定義的指標，希望能貼近玩家對遊戲難度的真實感受，使其更容易進入心流狀態。為了不費時耗力找許多玩家進行遊戲以獲得解題成功率，本研究使用迴歸分析的方式預估解題成功率，而迴歸分析中自變數的選擇與迴歸分析結果息息相關，何種屬性適用於此，將是本研究須深入探討的地方。綜合文獻探討和實驗結果提出以下結論與建議。

5.1 結論

一、解題成功率的 82.8%可以各種難度的數獨技巧使用次數解釋

由第四章的實驗結果得知，由解題策略使用次數預估解題成功率可達 82.8%的解釋能力，而使用題目結構的相關屬性預估解題成功率僅有 53.4%的解釋力，由此可知解題成功率的高低與解題策略有強烈的關聯性，與題目結構的相關屬性較無關。更深入探討後發現，與解題成功率相關性最高的使用技巧前四名為數對唯餘解(-0.899)、宮摒餘解(-0.702)、唯一解(-0.686)和猜測(-0.391)，但利用解題策略所求得的迴歸式當中，採用的自變數為數對唯餘解、唯一解和猜測，並非相關性前三高的使用技巧，仔細觀察後發現，採用的自變數恰好分別屬於數獨技巧分類中的三類：進階技巧、基礎技巧和當所有技巧皆不適用時使用的猜測法，其中數對唯餘解為進階技巧中最常使用的技法，其餘技巧都較少使用，而基礎技巧中雖包含唯一解和宮摒餘解，但兩者相關係數高達 0.81，因而迴歸式中僅加入兩者中顯著性較高者為自變數。由此可推論，解題成功率是與各種難度的技巧使用次數相關，而不是特定解題策略使用次數。

二、進階技巧使用次數對解題成功率影響大

進階技巧中的數對唯餘解使用次數與解題成功率的相關係數為-0.899，基礎記巧中的唯一解使用次數與解題成功率的相關係數為-0.686，猜測使用次數與解題成功率的相關係數為-0.391，以數對唯餘解使用次數為最高，且為高度相關，代表在數獨中使用進階技巧的次數影響解題成功率較大。雖然在迴歸式中數對唯餘解的迴歸係數(-0.407)與唯一解的迴歸係數(-0.477)差異不大，但若從兩者使用次數的標準差來看，唯一解使用次數的標準差為 3.433，而數對唯餘解使用次數的標準差為 8.377，這代表在數獨題目中使用唯一解的次數差異較小，但使用數對唯餘解的次數差異大，也因此在迴歸式的其中一個減數-0.477× *log*(唯一解使用次數)影響小，數對唯餘解的使用次數對解題成功率的影響較大。而猜測平均使用次數為 0.45 次，迴歸係數為最小(-0.183)，對解題成功率的影響為三變數中最小。

三、分支、死路節點數和解題策略使用次數與解題成功率成對數關係

第一次使用題目結構中的分支節點數和死路節點數進行迴歸分析時，殘差項不符合常態檢定，因此需轉換自變數使其能符合常態性假設，在經由測試後發現，當所有自變數進行對數轉換時，即可通過常態性檢定。此外在第一次利用解題策略使用次數進行迴歸分析時，殘差項亦不符合常態檢定，所有自變數進行對數轉換後，也即可通過常態性檢定。由此可知，分支節點數、死路節點數和解題策略使用次數與解題成功率之間皆呈現對數關係。

四、死路節點次數愈多，解題成功率愈高

使用解題策略使用次數產生的迴歸式，各項自變數的迴歸係數皆為負數，代表無論使用何種技巧解題，次數愈多解題成功率愈低。在使用分支節點數和死路節點數產生的迴歸式中，分支節點的迴歸係數為負數，代表分支節點愈多，解題成功率愈低，但死路節點的迴歸係數為正數，與預先認為死路節點數量較多，較不易往正確解題路徑前進，且多次失敗經驗會玩家缺乏耐心完成挑戰的想法不符合，反而死路節點愈多，解題成功率愈高。由此推測，死路節點愈多，玩家愈容易找尋到正確的解題路徑，而走到死路節點的失敗經驗，對玩家完成挑戰影響造成巨大負面的影響。

5.2 未來展望

古典測驗理論中以解題成功率定義試題難度，本研究將此方法應用於定義數獨難度，且使用迴歸分析找出不須玩家實際遊戲即可成功取得解題成功率的公式，其中以解題策略使用次數作為迴歸分析的自變數。然而此方法不應只限用於數獨中，還可延伸應用於其他遊戲，前提為該遊戲須可定義挑戰成功與失敗，否則無法計算出挑戰成功率，以下為建議方向：

1. 可區分遊戲技巧：

   由於本研究使用各種技巧使用次數作為迴歸分析的自變數，因此可區分遊戲技巧的遊戲也可使用此方式找出屬於自己的解題成功率預估公式。

2. 不可區分遊戲技巧

   不可區分遊戲技巧的遊戲，可另外使用其他可能與解題成功率相關的屬性進行迴歸分析，找出新的預估解題成功率的方法。例如：若有各別玩家的遊戲資訊，可從中找尋與解題成功率相關屬性，如此以來即可針對各別玩家定義遊戲難度。

參考文獻

Bartlett, A. C., & Langville, A. N. (2006). An integer programming model for the Sudoku problem. *Science*.

Binet, A., & Simon, T. (1905). Méthodes nouvelles pour le diagnostic du niveau intellectuel des anormaux. *Lannée psychologique*, *11*, 191-244.

Brown, R. G., & Meyer, R. F. (1961). The Fundamental Theorem of Exponential Smoothing. *Operations Research*, *9*(5), 673-685.

Chen, J. (2007). Flow in games (and everything else). *Communications of the ACM*, *50*(4), 31. ACM.

Chopra, S., & Meindl, P. (2001). Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation. *International Journal of Quality*, *20*(3), 398-400.

Crawford, C. (1984). The Art of Computer Game Design. Berkeley, Osborne/McGraw-Hill.

Crocker, L., & Algina, J. (1986). Introduction to classical and modern test theory. (p. 527).

Csikszentmihalyi, M. (1975). *Beyond Boredom and Anxiety*.

Ebel, Robert L. & Frisbie, David A. (1991). *Essentials of educational measurement*.

Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Fowler, G. (2009). A 9x9 sudoku solver and generator. *AT&T Labs Research*.

Geem, Z. (2010). Harmony search algorithm for solving sudoku. *Based Intelligent Information and Engineering Systems*, 371-378.

Green, K. E., & Frantom, C. G. (2002). Survey development and validation with the Rasch model. *International Conference on Questionnaire Development Evaluation and Testing*.

Greeno, J. G. (1974). Hobbits and orcs: Acquisition of a sequential concept. *Cognitive Psychology*, *6*(2), 270-292.

Gulliksen, H. (1950). *Theory of mental tests*.

Jarušek, P., & Pelánek, R. (2010). *Human problem solving: Sokoban case study*.

Kotovsky, K., Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1985). Why are some problems hard? Evidence from Tower of Hanoi. *Cognitive Psychology*, *17*(2), 248-294. Elsevier.

Leone Ale. (2008). Sudoku: Bagging a Difficulty Metric and Building Up Puzzles, 1-22.

Lewis, R. (2007). Metaheuristics can solve sudoku puzzles. *Journal of Heuristics*, *13*(4), 387-401.

Louis Lee, N. Y., Goodwin, G. P., & Johnson-Laird, P. N. (2008). The psychological puzzle of Sudoku. *Thinking Reasoning*, *14*(4), 342-364.

Lynce, I., & Ouaknine, J. (2006). Sudoku as a SAT Problem. *Symposium A Quarterly Journal In Modern Foreign Literatures*, 1-9. Citeseer.

Mantere, T., & Koljonen, J. (2007). Solving, rating and generating Sudoku puzzles with GA. *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (pp. 1382-1389).

Moraglio, A., Togelius, J., & Lucas, S. (2006). Product Geometric Crossover for the Sudoku Puzzle. *Evolutionary Computation*, 470-476.

Newton, P. K., & DeSalvo, S. A. (2010). The Shannon entropy of Sudoku matrices. *Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, *466*(2119), rspa.2009.0522-.

Nicolau, M., & Ryan, C. (2006). Solving Sudoku with the GAuGE System. In P. Collet, M. Tomassini, M. Ebner, S. Gustafson, & A. Ekárt (Eds.), *Genetic Programming* (Vol. 3905, pp. 213-224).

Perez, M., & Marwala, T. (2008). Stochastic Optimization Approaches for Solving Sudoku. *08050697*, 13.

Pizlo, Z., & Li, Z. (2005). Solving combinatorial problems: the 15-puzzle. *Memory cognition*, *33*(6), 1069-1084.

Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. *Danish Institute for Educational Research* (Vol. 1). Danish Institute for Educational Research.

Santosgarcia, G., & Palomino, M. (2007). Solving Sudoku Puzzles with Rewriting Rules. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, *176*(4), 79-93.

Sato, Y., & Inoue, H. (2010). Genetic Operations to Solve Sudoku Puzzles. *Proceedings of the IEEE*, 2111-2112.

Sweetser, P., & Wyeth, P. (2005). model for evaluating player enjoyment in games. *Computers in Entertainment CIE*, *3*(3), 14-27.